ISTITUZIONI

DI

ARITMETICA

DI

GABRIELE FERGOLA

PROFESSORE AGGIUNTO ALLA CATTEDRA DI ASTRONOMIA
NELLA REGIA UNIVERSITA' DEGLI STUDII DI NAPOLI

PER USO

DEL SUO STUDIO PRIVATO.

NAPOLI
PRESSO DOMENICO SANGIACOMO
1829.

PREFAZIONE.

Ciascun Autore, che Istituzioni di Scienze egli scrisse, s'impegnò certamente di adempiere all' oggetto principale, che ei si propose; cioè di ordirle in quella guisa, che si avea formato nella sua mente. Adunque alla molto diversa maniera di pensare degli uomini deesi certamente attribuire, che di una medesima Scienza molte Istituzioni state sieno già pubblicate. Ora essendomi avveduto, che ad alcune opere di Aritmetica manchino esatte definizioni, ed altre di chiarezza nel dimostrare, non che di certe nozioni che ho creduto necessarie a dovervisi inserire, ho stimato rendere di pubblica ragione questo mio abbenchè tenue lavoro.

NOZIONI PRELIMINARI

AL

CORSO DI MATEMATICA

§. 1. *Def. I.* Ogni cosa che è divisibile in parti, e che può ricevere accrescimento o diminuzione, dicesi *grandezza* o *quantità*.

§. 2. *Cor.* Dunque sono grandezze i corpi, che ci circondano, lo spazio nel quale ci troviamo, la distanza di un luogo da un altro, la velocità colla quale un corpo si muove, la forza che lo spinge, il tempo, che da esso impiegasi a percorrere un certo sentiero, l'aggregato di più cose uguali, ed altre simili.

§. 3. *Def. II.* Le grandezze si distinguono in *continue* e *discrete*.

§. 4. *Def. III.* Chiamasi *grandezza continua* quella le cui parti vi sono talmente unite, che non si possono distinguere e numerare.

§. 5. *Scol.* Tali sono la distanza di un luogo da un altro, lo spazio nel quale ci troviamo, il tempo, la velocità colla quale un corpo si muove, ed altre tali.

§. 6. *Def. IV.* Una grandezza dicesi *discreta*, se le parti di essa sono l'una dall'altra distinte, tal che si possano conoscere e numerare.

Risch. Un corpo qualunque è una quantità continua, poichè le parti di esso non si possono numerare. Ma qualora quel corpo si considera come parte dell'aggregato di più corpi, ciascuno uguale ad esso, di tale aggregato si conoscono e numerano le parti, le quali sono tante per quanti sono quei corpi.

§. 7. *Cor.* Adunque le grandezze continue col rapportarle a certe unità si riducono sotto l'apparenza di

discrete. Di fatti se per es. la distanza di un luogo da un altro si rapporti ad una certa misura, come al palmo napoletano, si potrà quella distanza dinotare per un certo numero di palmi. Questi palmi saranno le parti di quella distanza, la quale essendo una grandezza continua si presenta sotto l' apparenza di discreta.

§. 8. *Def. V.* Quella facoltà, che ha per oggetto le grandezze, dicesi *Matematica*, ed essa dividesi in due parti, di cui una esamina le grandezze continue, e l'altra considera le grandezze discrete e le continue sotto la mentita forma di discrete.

§. 9. *Def. VI.* Quella parte delle Matematiche, che ha per oggetto le grandezze continue, dicesi *Sintetica*: e quella, che ha per oggetto le grandezze discrete e le continue sotto l'apparenza di discrete chiamasi *Matematica Analitica*, ovvero *Analisi*.

§. *10. Scol.* E poichè in ogni Scienza, che dettar si voglia, è uopo che le principali nozioni, e i vocaboli in essa usati si espongano; perciò quaggiù le definizioni necessarie a premettersi dichiarerò convenevolmente.

§. *11. Def. VII.* La *definizione* consiste nella chiara e precisa spiegazione di una cosa ovvero di una parola.

§. *12. Def. VIII.* I principii, dai quali si deducono tutte le verità sulle grandezze, ovverò per mezzo dei quali si eseguono alcune operazioni sulle grandezze medesime, sono gli *assiomi* ed i *postulati*.

§. *13. Def. IX.* L' *assioma* è una verità, che si comprende senza che vi sia bisogno di dimostrazione.

§. *14. Def. X.* Il *postulato* è un principio di Scienza che si dee concedere, perchè chiaro e facile.

§. *15. Def. XI.* Le verità, che con alcuni ragionamenti si rilevano dai postulati e dagli assiomi, come pure da altre verità anteriormente dimostrate, diconsi *Teoremi*.

§. *16. Def. XII.* Quelle operazioni che si propongono a fare sulle grandezze per mezzo dei postulati o di altre operazioni già eseguite sulle grandezze medesime, si dicono *Problemi*.

§. *17*. *Def.* *XIII.* I Teoremi ed i Problemi si dicono generalmente *Proposizioni*.

§. *18*. *Def.* *XIV*. Il *Lemma* è una proposizione, in cui si stabilisce una verità, ovvero si esegue un'operazione, che dee servire per la dimostrazione di un Teorema, ovvero per lo scioglimento di un Problema.

§. *19*. *Def.* *XV*. Il *Corollario* è una conseguenza che si deduce da qualche proposizione già dimostrata.

§. *20*. *Def.* *XVI*. Lo *Scolio* è un'aggiunzione che fassi a qualche Proposizione per rendere più chiara la dottrina in essa esposta.

§. *21*. *Def.* *XVII*. Ogni Proposizion Matematica suol contenere cinque parti, che si dicono *enunciazione in astratto*, *dichiarazione*, *costruzione*, *dimostrazione* e *conclusione*: e di queste talvolta nei Teoremi manca la costruzione.

§. *22*. *Def.* *XVIII*. Nell'enunciazione di ogni Teorema vi si contengono due parti, di cui la prima dicesi *Ipotesi*, e l'altra *Tesi*.

§. *23*. *Def.* *XIX*. L'*Ipotesi* è ciò che si assume per vero in un Teorema, e la *Tesi* è quella verità che si vuol rilevare dalla detta Ipotesi.

§. *24*. *Def.* *XX*. Nell'enunciazione di quasi tutti i Problemi vi si contengono due parti, che si dinotano coi nomi di *dati e quesiti*.

§. *25*. *Def.* *XXI*. I *dati* sono quelle cose, che si concedono in un Problema per esibire le altre, che si domandauo, e che diconsi *quesiti*.

INSTITUZIONI

DI

ARITMETICA.

CAP. I.

PRINCIPII GENERALI DELLA NUMERAZIONE.

§. 1. *Def. I.* Ogni cosa, che si concepisce indivisa in se stessa, ma distinta e separata da ogni altra, dicesi *unità*.

§. 2. *Def. II.* Il *numero* è quello che dinota l'aggregato di più unità o di alcune parti di essa: e'l medesimo dicesi *intiero* o *fratto* secondochè rappresenta unità intiere ovvero alcune parti dell'unità.

§. 3. *Def. III.* I numeri intieri non maggiori del nove, si dicono *numeri semplici*: e si chiamano *composti* quei numeri intieri maggiori del nove.

§. 4. *Def. IV.* L'*Aritmetica* è la scienza dei numeri.

§. 5. *Post. I.* I numeri semplici vengono dinotati dagli Aritmetici colle seguenti cifre:

1	. . . .	uno
2	. . . .	due
3	. . . .	tre
4	, che si pronunciano	quattro
5		cinque
6	. . . .	sei
7	. . . .	sette
8	. . . .	otto
9	. . . .	nove

ed a queste cifre vi si aggiunge l'altra *o*, che pronunciasi zero, la quale da se sola non ha valore alcuno, ma posta a destra delle cifre, che ne dinotano un qualunque numero, ne forma un altro, il quale pareggia il numero dinotato da quelle cifre preso dieci volte.

§. 6. ***Post. II.*** Qualora ad un numero, che si scrive con una delle cifre dei numeri semplici ed uno o più zeri, vuolsi aggiungere un numero semplice, la cifra, onde questo vien dinotato, si scrive in luogo dell'ultimo zero, che trovasi in quel numero.

§. 7. *Cor. I.* Dunque se a destra del numero semplice 5 pongasi la cifra *o*, ne risulta l' altro numero 50, che pronunciasi *cinquanta*, e che adegua il 5 preso dieci volte. E ponendo a destra del numero 50 un altro *o*, ne dovrà risultare il numero 500, che pronunciasi *cinquecento*, e che pareggia il numero 50 preso dieci volte, e così appresso.

§. 8. *Cor. II.* E quindi qualora alla destra di un numero semplice, per rapporto a chi scrive, vi si ponga un *o*, ogni unità di quel numero semplice dovrà prendere il valore di una decina, se pongansi a destra del medesimo numero semplice due *o*, ogni unità di esso acquisterà il valore decuplo della diecina, o sia acquisterà il valore di un centinajo. Ponendo tre *o* a destra di un numero semplice, ogni unità di esso dovrà acquistare il valore decuplo del centinajo, ovvero acquisterà il valore di un migliajo: e ponendo a destra di un numero semplice quattro *o*, ogni unità di esso prenderà il valore decuplo del migliajo, e 'l numero, che ne risulta, dinoterà tante diecine di migliaja per quante sono le unità del numero semplice. Nello stesso modo coll' accozzamento di altri zeri alla destra di quel numero semplice si potranno formare le centinaja di migliaja, le unità, le diecine, e le centinaja di milioni,

le { unità / diecine / e le centinaja } di migliaja di milioni,

le { unità / diecine } di bilioni,
e le centinaja
ec.

§. 9. *Cor. III.* Inoltre, se al numero 50 si debba aggiungere il numero semplice 7, questo si dovrà scrivere in luogo della cifra *o*, e 'l numero 57, che ne risulta, si dovrà pronunciare *cinquanta-sette*. Che se alla destra di questo numero 57 scrivasi la cifra *o*, ne risulterà il numero 570, il quale pronunciasi *cinquecento-settanta*, e che adegua il 57 preso dieci volte, ovvero il 50 preso dieci volte aggiunto al 7 preso dieci volte. Ma il 50 preso dieci volte pareggia 5 centinaja, e 'l sette preso dieci volte adegua sette diecine. Dunque nel numero 570 procedendo dalla destra verso la sinistra non vi s'incontrano unità, ma vi sono sette diecine, e 5 centinaja: e nel numero 5700, che è il decuplo di 570, procedendo dalla destra verso la sinistra, non vi s'incontrano unità nè diecine, ma vi sono 7 centinaja e 5 migliaja.

§. 10. *Cor. IV.* Che se poi al numero 5700 debbasi aggiungere il numero semplice 4, questo dovrà porsi in luogo dell'ultimo *o*. Onde ne dovrà risultare il numero 5704, che pronunciasi *cinquemila-settecento-quattro*: ed in esso procedendo dalla destra verso la sinistra vi s'incontrano 4 unità, ma vi mancano le diecine, in seguito vi sono 7 centinaja, ed in fine si trovano 5 migliaja.

§. 11. *Cor. V.* E di quì apparisce, 1°. che per mezzo delle nove cifre e dello zero si possa scrivere un qualunque numero, 2°. che ogni cifra di un numero composto, oltre al valore delle unità, che contiene, e che dicesi *valore nominale*, ne ha un altro, che dipende dal luogo, che essa occupa in quel numero composto, e che dicesi *valore locale*.

§. 12. *Scol.* Se l'unità dividasi in un qualunque numero di parti tra se uguali, queste insieme prese dovranno pareggiare quell'unità. Onde, se prendasi per

unità una di tali parti, la prima ne verrà rappresentata dal numero delle parti in che essa è stata divisa. E per tal ragione l' unità non è una grandezza assoluta, ma è una convenzione mercè la quale una grandezza qualunque dicesi una.

§. 13. *Def. V.* Quei numeri, le cui unità non si riferiscono ad alcuna grandezza si dicono *numeri astratti* e si chiamano *numeri concreti* quelli, le cui unità si riferiscono ad una qualunque grandezza.

§. 14. *Cor.* Adunque *cinque* o *cinque volte*, *nove* o *nove volte*, ec. sono numeri astratti, perchè le loro unità non si riferiscono ad alcuna grandezza: e sono numeri concreti *tre canne*, *cinque miglia*, ec., poichè le unità di questi si riferiscono alla canna, al miglio ec.

§. 15. *Def. VI.* I *numeri omogenei* sono quelli, che dinotano grandezze dello stesso genere, ancorchè le loro unità differiscano in valore. E si dicono *eterogenei* quei numeri, che rappresentano grandezze di diverso genere.

§. 16. *Scol.* Da quanto si è stabilito nel §. 8. apparisce, 1.° che in ogni numero composto procedendo dalla destra verso la sinistra s' incontrano nell' ordine seguente, *le unità*, *le decine*, *e le centinaja semplici*, dipoi *le unità*, *le diecine e le centinaja di migliaja*, in seguito *le unità*, *le diecine e le centinaja di milioni*, *le unità*, *le diecine e le centinaja di migliaja di milioni*, e così in appresso, 2.° e che mancando una o più cifre, che ne dinotano le unità, le diecine, ec. i luoghi, ov' esse andrebbero poste vengono suppliti dagli zeri. E di quì risultano le soluzioni dei due Problemi, che quaggiù vengono proposti.

PROP. I. PROBL.

§. 17. *Dato un numero*, *esprimerne il valore.*

Sol. Il numero dato, per mezzo di alcune virgole, procedendo dalla destra verso la sinistra si divida in membri, ciascuno dei quali contenga solo tre figure, ec-

cetto l'ultimo, che può contenerne due, ed anche una. Dipoi sulle prime cifre a destra del primo, del terzo, del quinto, ec. membro vi si scrivano respettivamente le cifre o, 1, 2, 3, 4, ec.

E poichè i numeri sopra i quali sono scritte le cifre o, 1, 2, 3, ec. sono respettivamente (§. 8.) le unità semplici, le unità di milioni, le unità di bilioni ec., l'è chiaro, 1.° che le cifre poste alla sinistra di essi debbano rappresentare respettivamente le decine di unità, le diecine di milioni, le diecine di bilioni, ec. 2.° che gli altri numeri, che verso la sinistra seguono quelle diecine, debbano dinotare respettivamente le centinaja di milioni, le centinaja di bilioni, ec., 3.° che le prime cifre a destra del secondo, quarto, sesto ec. membro devono dinotare respettivamente le unità di migliaja, le unità di migliaja di milioni, le unità di migliaja di bilioni, ec. Nello stesso modo dovrà procedersi in appresso (§. 8.). Dunque bisognerà pronunciare *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, ec. allora che si leggono quei numeri, cui vanno soprapposte respettivamente le cifre 1, 2, 3, ec. bisognerà pronunciare *migliaja* ovvero *mila* allora che si leggono gli ultimi numeri di quei membri, cui non ritrovasi soprascritta alcuna delle cifre o, 1, 2, 3, ec.

Esempio. Vogliasi esprimere il valore del numero *A*

A . . . . . $3\overset{2}{1},503,26\overset{1}{4},258,90\overset{0}{3}$.

Fatte le operazioni quassù indicate, il valore del numero *A* così esprimerassi, cioè *trentuno bilioni cinquecento-tremila, duecento sessanta-quattro milioni, duecento cinquantotto mila novecento-tre.*

PROP. II. PROBL.

§. 18. *Scrivere un numero, di cui ne sia espresso il valore.*

Sol. Si osservi se nel pronunciare il numero, che vogliasi scrivere, cada nel principio la parola *mila*, ov-

vero una delle altre *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, ec. Nell' uno e nell' altro caso si pronuncii da capo il numero fino alla prima di quelle parole, e dopo questo numero si ponga una virgola. Ma nel secondo caso, oltre alla virgola, sull' ultima cifra a destra del numero già scritto vi si ponga pure una delle seguenti cifre 1, 2, 3, ec. secondochè nel pronunciare il numero, che vogliasi scrivere, s' incontri a principio una delle parole *milioni*; *bilioni*, *trilioni*, ec. Dipoi si pronuncii il restante del detto numero, e collo stesso mezzo si scrivano gli altri ternarii di esso fino a che si pervenga alle unità semplici, se però non vi sia interruzione nell' ordine delle cifre del numero propostosi a scrivere. Che se poi si osservi qualche interruzione nell' ordine delle cifre; in tal caso le cifre mancanti si suppliscano con gli zeri.

Esempio. Vogliasi scrivere con cifre il numero

Cinquecento-trenta trilioni, *quattrocento-venticinque* mila *seicento* bilioni, *novecento-trenta* mila *ottocento-due*.

Si leggano le parole, che precedono l'altra *trilioni*, e si scriva il numero 530, che vien espresso con quelle parole. Dipoi si ponga la virgola dopo lo zero del 530, ed il 3 per dinotare i *trilioni* sopra l' ultima cifra *o* dello stesso numero 530. Inoltre, nell'espressione del numero, che vuolsi scrivere, si lascino le parole *cinquecento-trenta trilioni*, e si legga il resto fin dove s'incontri la prima volta la parola *mila*, che vien riferita ai bilioni: e se in questa lettura si trovino le centinaja le diecine e le unità si scriva il ternario, che deve dinotarlo, altrimenti vi si suppliscano gli zeri. Nella stessa guisa dovrà procedersi in appresso. Dunque il numero, di cui n'è data l'espressione, dev' essere il seguente

$$53\overset{3}{0},425,60\overset{2}{0},000,00\overset{1}{0},930,80\overset{0}{2}.$$

CAP. II.

DEL CALCOLO DEI NUMERI INTIERI.

§. 19. *Def. VII.* La *somma* è un'operazione colla quale si ottiene un numero, che pareggia più numeri dati omogenei insieme presi.

§. 20. *Scol.* Il segno col quale suole indicarsi la somma di due o più numeri è il seguente +, che si pronuncia *più*. Tal che se vogliasi indicare la somma di 5 e 7 converrà scrivere 5+7, che pronunciasi *cinque più sette*.

§. 21. *Def. VIII.* La *sottrazione* è un'operazione colla quale si determina la differenza tra due numeri omogenei. Il maggiore dei numeri dati dicesi *diminuendo*, il minore *sottrattore*, e la differenza, che con questa operazione si ottiene, chiamasi *residuo*.

§. 22. *Scol.* La sottrazione di un numero da un altro viene indicata col seguente segno −, che si pronuncia *meno*. Così p. e. dovendosi sottrarre 3 da 8, converrà scrivere 8−3, che pronunciasi *otto meno trè*.

§. 23. *Def. IX.* La *multiplica* è un'operazione aritmetica colla quale dati due numeri se ne determina un altro, che adegua uno di essi preso tante volte quante sono le unità dell'altro. Il primo di questi numeri dicesi *multiplicando*, il secondo *multiplicatore*, quel numero, che si ottiene, chiamasi *prodotto*, e 'l multiplicando e 'l multiplicatore si chiamano pure *fattori* del prodotto.

§. 24. *Scol.* La multiplica di due numeri viene indicata col seguente segno ×, ovvero ponendo un punto tra i numeri da multiplicarsi, o scrivendo i due fattori in due parentesi, e con altri segni ancora. Tal che dovendosi multiplicare 13 per 27, il prodotto potrà esserne indicato tanto da 13×27, che da 13. 27. Così pure dovendosi multiplicare la somma di 5 e 9 per quella di 13 e 17, un tal prodotto ne sarà indicato da una delle seguenti espressioni.

$$(5+9)(13+17),\ \overline{5+9}\times\overline{13+17},\ (5+9).(13+17),\ \text{e}\ \overline{5+9}.\overline{13+17}.$$

§. 25. *Def.* X. La *divisione* è un'operazione aritmetica colla quale dati due numeri se ne vuol trovare un terzo, che dinoti quante volte uno di essi numeri si contenga nell'altro. Quello dei numeri dati, che debba un certo numero di volte contenere l'altro, si dirà *dividendo* : quello poi, che si contenga si chiamerà *divisore*, e l'altro, che colla divisione ne risulti, dirassi *quoto*, o *quoziente*.

Talvolta dovendosi dividere un numero intiero per un altro minore di esso, suole accadere, che questo secondo non si contenga un esatto numero di volte nel primo, tal che il divisore preso un certo numero di volte dia un prodotto minore del dividendo, e da cui ne differisca per un numero minore dello stesso divisore. In tal caso ciò che resta nella divisione dirassi *residuo*.

§. 26. *Cor.* E poichè il prodotto di due numeri contiene tante volte uno di essi, quante sono le unità dell'altro, l'è chiaro che se dividasi quel prodotto per uno de' suoi fattori, ne dovrà risultare l'altro fattore.

§. 27. *Scol. I.* La divisione di un numero per un altro viene indicata con diversi segni, tal che delle seguenti espressioni

$12 : 3$, $(3+17-2) : (5-4+8)$, $\overline{3+17-2} : \overline{5-4+8}$

la prima dinota il quoto, che si ha dividendo 12 per 3, e ciascuna delle altre due rappresenta il quoto di $3+17-2$ per $5-4+8$.

§. 28. *Scol. II.* Il segno col quale suole indicarsi l'uguaglianza di due numeri è il seguente $=$, che pronunciasi *uguale*, tal che volendo dinotare, che la somma di 12 e 4 è uguale a 16, si scrive $12+4=16$.

PROP. III. PROBL.

§. 29. *Dati più numeri omogenei, prenderne la loro somma.*

Sol. I numeri dati si scrivano l'uno sotto dell'altro, tal che le unità di essi si trovino le une sopra le altre, le diecine sulle diecine, le centinaja sulle cen-

tinaja, e così in appresso. Dipoi sotto di essi numeri in tal guisa disposti si distenda una linea orizzontale, e si prenda la somma di tutte le unità semplici, che sono nei medesimi numeri. Se tale somma non oltrepassi le *nove* unità, essa si scriva sotto la linea nella medesima direzione verticale colle unità dei numeri dati. Ma se quella somma oltrepassi le nove unità, in tal caso si dovrà scrivere soltanto l'eccesso di essa somma sulle diecine, ovvero la cifra *o* nel caso che la detta somma contenga un esatto numero di diecine.

Inoltre, si prenda la somma delle diecine dei numeri dati, e ad essa vi si aggiungano le diecine ottenute dalla somma delle unità degli stessi numeri. Se quest'ultima somma non risulti maggiore delle nove diecine, queste si scrivano sotto la linea orizzontale, ed in direzione verticale colle diecine. Ma se quella somma oltrepassi le nove diecine, in tal caso si dovrà scrivere soltanto l'eccesso di essa sulle centinaja. Nello stesso modo dovrà procedersi in appresso. Sarà chiaro, che il numero, che risulta sotto la linea orizzontale, contenendo la somma delle unità, quella delle diecine, ec. dei numeri dati, debba essere la somma di questi *C. B. F.*

Esempio. Sieno dati i numeri omogenei 47093, 25806, e 1387, fa d'uopo prenderne la loro somma.

Si dispongano i numeri dati, come quassù si è detto, e sotto di essi si distenda una linea orizzontale. Dipoi si prenda la somma 16 delle unità semplici 3, 6, e 7 dei numeri dati, e l'eccesso 6 di quella somma sulla diecina si scriva sotto la linea orizzontale, ed in direzione verticale colle unità dei numeri proposti.

```
 47093
 25806
  1387
 -----
 74286
```

Inoltre, alla somma 17 diecine delle diecine 9 ed 8, che sono nei numeri dati, vi si aggiunga la diecina, che si è ottenuta dalla somma delle unità degli stessi numeri. Onde si avranno 18 diecine, ovvero 8 diecine ed un centinajo. Si scrivano le 8 diecine a sinistra delle 6 unità della somma, e'l centinajo si aggiunga alla somma

11 centinaja di 8 centinaja e 3 centinaja, che sono nei numeri dati. Onde si otterranno 12 centinaja, ovvero 2 centinaja ed un migliajo. Si scrivano le 2 centinaja a sinistra delle 8 diecine, e si prosegua il resto dell'operazione, come si è praticato finora.

PROP. IV. PROBL.

§. 30. *Esaminare se nel prendere la somma di più numeri omogenei siasi errato.*

Sol. Dopo aver sommati i numeri proposti si tiri una linea tra 'l primo di essi e 'l secondo. Dipoi si prenda la somma dei numeri dati, che si trovano sotto la detta linea, ed a tale somma vi si aggiunga in seguito il numero, che si trova sopra la stessa linea. Sarà chiaro, che se l'operazione fu bene eseguita, deve emergerne in quest'ultima somma un numero uguale alla somma dei numeri dati C. B. F.

PROP. V. PROBL.

§. 31. *Dati due numeri omogenei disuguali, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Sieno dati i due numeri omogenei disuguali 34062 e 5839, fa duopo sottrarre dal maggiore di essi 34062 il minore 5839.

Si dispongano i due numeri in modo che le unità, diecine, centinaja, ec. del diminuendo 34062 corrispondano sulle unità, diecine, centinaja, ec. del sottrattore, e sotto di essi distendasi una linea orizzontale.

E poichè le nove unità del sottrattore sono maggiori delle due unità del diminuendo, se prendasi una diecina del diminuendo, e si aggiunga alle due unità di esso, si avranno in tal modo 12 unità del diminuendo, da cui se ne devono togliere 9 unità, che sono nel sottrattore. Onde si otterranno 3 unità per residuo di questa prima operazione, e 'l numero 3 si dovrà scrivere sotto la linea orizzontale, ed in direzione ver-

ticale colle unità del diminuendo e del sottrattore. Ma siccome in questa prima operazione una diecina del diminuendo si è ridotta ad unità; l' è chiaro, che nel diminuendo vi restano solo 5 diecine, da cui se ne devono togliere 3 diecine, che sono nel sottrattore: ed in tale operazione si ottengono 2 diecine per residuo: il numero 2 si dovrà scrivere a sinistra del 3 ottenuto nella prima operazione. Inoltre, poichè nel diminuendo vi mancano le centinaja, per togliere da esso le 8 centinaja del sottrattore si dovrà ridurre un migliajo del diminuendo a 10 centinaja. Ma togliendo 8 centinaja da 10 centinaja si ottengono 2 centinaja. Dunque il numero 2, che dinota le centinaja del residuo, si dovrà scrivere a sinistra dell' altro 2, che ne dinota le diecine. Dippiù essendosi un migliajo del diminuendo ridotto a 10 centinaja, le 4 migliaja di esso si trovano ora ridotte a 3. Il perchè non potendosi togliere le 5 migliaja del sottrattore dalle 3 migliaja del diminuendo, converrà ridurre una diecina di migliajo del diminuendo a 10 migliaja, che aggiunte alle 3 migliaja, che vi sono restate dalla precedente operazione, formano 13 migliaja, da cui togliendone 5 dovranno rimanerne 8: e 'l numero 8 si dovrà scrivere a sinistra del 2 ottenuto dalla precedente operazione. Finalmente, essendosi ridotta una diecina di migliajo del diminuendo a 10 migliaja, le 3 diecine di migliaja del diminuendo si trovano ora ridotte a 2, da cui non devesi sottrarre alcuna diecina di migliajo, poichè queste mancano nel sottrattore. Dunque scrivendo il numero 2 a sinistra dell' 8 ottenuto nella precedente operazione, si avrà sotto la linea orizzontale il numero 28223, che dinota la differenza dei numeri dati. C. B. F.

Diminuendo	34062
Sottrattore	5839
Residuo	28223

PROP. VI. PROBL.

§. 32. *Esaminare se nel sottrarre un numero da un altro siasi commesso errore.*

Sol. E poichè in ogni sottrazione il residuo dinota di quanto il diminuendo supera il sottrattore, l'è chiaro, che se l' operazione sia stata bene eseguita, la somma del sottrattore e del residuo debba pareggiare il diminuendo. Altrimenti dovrà farsi di nuovo la sottrazione. C. B. F.

PROP. VII. TEOR.

§. 33. *Se nella Tavola* ABCD *di rincontro ai numeri* 1, 2, 3, 4, 5, *ec., che sono posti nella prima riga orizzontale* AB, *si scrivano i doppii, i tripli, i quadrupli, ec. di essi numeri nelle respettive colonne verticali, mercè la stessa tavola, che dal suo inventore Pittagora chiamasi* tavola Pittagorica, *si potranno ottenere tutti i prodotti, i cui fattori si trovano nella prima linea orizzontale* AB, *e nella prima linea verticale* AD.

Dim. Poichè ogni numero, che si prende nella descritta tavola è uguale a quello, che sta al principio della colonna verticale, ove lo stesso numero si ritrova, preso tante volte quante sono le unità, che si contengono nel primo numero, che sta nella stessa direzione orizzontale col numero preso nella detta tavola. Il perchè quel numero, che si prende nella tavola Pittagorica, dee dinotare il prodotto, i cui fattori si trovano nei primi luoghi delle due linee orizzontale e verticale, e che s' incontrano nel sito, ove sta posto quel numero. Così p. es. il numero 42, che ritrovasi nella sesta colonna verticale, dee dinotare il prodotto di 6, che sta a principio della sesta colonna, nel numero 7, che trovasi in primo luogo della riga orizzontale, ove sta posto il 42.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

D C

§. 34. *Cor. I.* E poichè i numeri della prima colonna verticale AD della tavola Pittagorica sono quegli stessi, che si trovano nella prima riga orizzontale AB della medesima tavola, devono essere i numeri della seconda colonna verticale della tavola Pittagorica quei medesimi, che collo stesso ordine sono nella seconda riga orizzontale, i numeri della terza colonna verticale devono essere gli stessi degli altri, che si trovano nella terza colonna orizzontale: lo stesso si dica delle rimanenti colonne.

§. 35. *Cor. II.* Adunque il prodotto di due numeri dovrà essere sempre lo stesso o che si prenda il primo di essi nella riga orizzontale AB e 'l secondo nella colonna verticale AD, ovvero che si prenda il secondo nella riga AB e 'l primo nella colonna AD. Vale a dire, che *due numeri multiplicati tra loro danno sempre lo stesso prodotto o che si multiplichi il primo di essi pel secondo, ovvero il secondo pel primo.*

§. 36. *Cor. III.* Essendo 120 il decuplo di 12, il prodotto di 120 per 15 dev'essere decuplo di quello,

che si ha multiplicando 12 per 15. Ma il decuplo del prodotto di 12 per 15 si ottiene ponendo un *o* a destra di questo prodotto (§. 5.). Dunque il prodotto di due numeri, dei quali uno termini collo zero, si ottiene multiplicando tra loro quei due numeri senza considerarvi lo zero, e poi scrivendo un zero a destra del prodotto.

§. 37. *Cor. IV*. Inoltre, essendo 1200 il centuplo di 12, il prodotto di 1200 per 15 dev'essere centuplo di quello, che si ha multiplicando 12 per 15. Ma il centuplo del prodotto di 12 per 15 si ottiene ponendo due zeri a destra di questo prodotto (§. 7.). Dunque il prodotto di due numeri, dei quali uno termini con due zeri, si ottiene multiplicando tra loro gli stessi numeri senza considerarvi quei zeri, e poi scrivendo quei due zeri a destra di un tal prodotto. Ed in generale, *il prodotto di due numeri, dei quali uno termini con un qualunque numero di zeri, si ottiene multiplicando tra loro gli stessi numeri senza considerarvi quei zeri, e poi scrivendo questi a destra del prodotto.*

§. 38. *Cor. V*. E poichè 150 è il decuplo di 15, dev'essere il prodotto di 150 per 12 decuplo di quello di 15 per 12, il prodotto di 150 per 120 decuplo dell'altro di 15 per 120; ec. Ma il decuplo del prodotto di 15 per 12 si ottiene ponendo un *o* a destra di questo prodotto, il decuplo del prodotto di 15 per 120. si ottiene ponendo un zero a destra di questo prodotto, ec. Dunque *il prodotto di due numeri, ciascuno dei quali termini con un qualunque numero di zeri, si ottiene multiplicando quei numeri senza considerarvi gli zeri, e ponendo a destra di un tal prodotto tanti zeri quanti se ne contengono in fine dei due fattori.*

§. 39. *Scol.* Affinchè si possa esattamente e con facilità eseguire la multiplicazione di due numeri, fa mestieri, che si sappiano a memoria i prodotti di tutti i numeri semplici a due a due: ed a ciò vi si perviene mediante la tavola pittagorica, la quale, per questo uso cui è destinata, suole arrestarsi al numero 9 tanto

nella prima riga orizzontale, che nella prima colonna verticale.

PROP. VIII. PROBL.

§. 40. *Dati due numeri, trovarne il prodotto.*

Sol. Sieno dati i numeri 57042 e 4065, fa duopo trovarne il prodotto.

Multiplicando	57042	I. I numeri dati si scrivano l'uno sopra dell'al-
Multiplicatore	4065	tro, e sotto di essi si
	285210	distenda una linea oriz-
	3422520	zontale. Sarà chiaro, che
	228168000	
Prodotto	231875730	il prodotto di 57042 per

4065 debba essere lo stesso che il numero 57042 preso 5 volte aggiunto allo stesso numero preso 60 volte insieme col medesimo numero preso 4000 volte; poichè la somma dei numeri 5, 60, e 4000 pareggia 4065. Dunque se multiplicasi prima il numero 57042 per 5, dipoi per 6, ed a destra di questo prodotto vi si ponga un *o* (§. 37.), e finalmente si multiplichi lo stesso numero 57042 per 4, ed a destra del prodotto vi si pongano tre zeri (§. 37.), la somma di tutti questi prodotti dovrà dinotarne quello di 57042 per 4065.

II. Intanto essendo 10 il prodotto delle 5 unità del multiplicatore per le 2 unità del multiplicando, quella diecina non potrà scriversi nel luogo delle unità del prodotto di 57042 per 5. Si ponga dunque *o* sotto la linea. Ma essendo il prodotto di 4 diecine del multiplicando per le 5 unità del multiplicatore uguale a 20 diecine, ed essendosi ottenuta un altra diecina nel prodotto di 5 per 2, dovranno essere 21 diecine, o sia 2 centinaja ed una diecina quelle, che si contengono nel prodotto di 42 per 5. Si scriva 1 a sinistra dello zero.

III. Inoltre, essendo il prodotto di 5 unità per *o* centinaja, che sono nel multiplicando uguale a *o*, nel prodotto di 57042 per 5 non vi si conterrebbero centinaja, se non vi fossero le 2 centinaja ottenute dalla

multiplicazione di 4 diecine per 5. Onde nel prodotto di 57042 per 5 dovrà porsi il numero 2, che dinota centinaja, a sinistra di 1, che dinota una diecina. Nello stesso modo si otterranno le migliaja, le diecine di migliaja, e le centinaja di migliaja del prodotto di 57042 per 5.

IV. Si multiplichi ora 57042 per 6, e 'l prodotto 342252 si scriva sotto del primo prodotto 285210, tal che le unità 2 di quello corrispondano sotto la diecina 1 di questo, le diecine 5 di quello sotto le centinaja 2 di questo, e così delle rimanenti. Sarà chiaro, che se a destra del numero 342252 si ponga un *o*, il numero 3422520, che ne risulta, dovrà dinotare (§. 37.) il prodotto di 57042 per 60.

V. Finalmente si multiplichi 57042 per 4, e 'l prodotto 228168 si scriva sotto del secondo prodotto 3422520, tal che le unità 8 di quello corrispondano sotto tal cifra del primo prodotto 285210, che alla destra abbia tante altre cifre quante ne ha il 4 nel multiplicatore, cioè tre. Dunque scrivendo le 8 unità del prodotto 228168 di 57042 per 4 sotto le quarte cifre di ciascuno dei due precedenti prodotti 285210 e 3422520, e ponendo a destra del prodotto 228168 tre zeri (§. 37.), la somma dei numeri 285210, 3422520, 228168000 ne dovrà dinotare l'intiero prodotto di 57042 per 4065. Ma poichè gli zeri, che sono in fine del secondo e terzo prodotto non alterano detta somma, l'è chiaro, che essi possono omettersi, badando di scrivere la prima cifra a destra del prodotto di 57042 per 6 sotto le diecine del prodotto 285210 di 57042 per 5, e la prima cifra a destra del prodotto di 57042 per 4 sotto tal cifra del prodotto 285210 di 57042 per 5, che a destra ne abbia tante altre quante ne ha il 4 nel multiplicatore 4065, cioè tre. C. B. F.

PROP. IX. PROBL.

§. 41. *Dati due numeri disuguali, dividere il maggiore di essi pel minore.*

Sol. Sieno dati i due numeri 357085 e 542, fa duopo dividere il maggiore di essi pel minore.

I. Si scriva il divisore 542 a destra del dividendo 357085.

	Dividendo	*Divisore*
	357085	542
	3252	*Quoto*
	3188	658
	2710	
	4785	
	4336	
Resid.	449	

e dal dividendo si separino dalla sinistra verso la destra tante cifre, che formino un numero non minore del divisore, e da cui togliendone l'ultima verso la destra, ne risulti un altro numero minore del divisore dato. Così nel caso proposto converrà separare dalla sinistra del dividendo le prime quattro cifre, che formano il numero 3570 maggiore del divisore 542, e da cui toltane l'ultima cifra *o*, si ottiene il numero 357, che è minore dello stesso divisore. Or poichè l'ultima cifra *o* del numero 3570 nel dividendo proposto trovasi nel luogo delle centinaja, quel numero dovrà dinotare centinaja, ovvero il medesimo sarà lo stesso di 357000. Onde se prendasi la cinquecento-quarantaduesima parte di 3570, questa dovrà essere la centesima parte di quella, che si ottiene dividendo 357000 per 542. Dunque se dividasi 3570 per 542, ed a sinistra del quoziente vi si pongano due *o*, il numero che ne risulta, dee dinotare quante volte il 542 si contenga in 357000. Ma poichè la prima cifra 5 a sinistra del divisore si contiene 7 volte nel numero 35, che è formato dalle due prime

cifre del dividendo, e la seconda cifra 4 del divisore non si contiene 7 volte nella terza cifra 7 del dividendo, l'è chiaro, che il quoto di 3570 per 542 debba essere un numero minore di 7, poichè se fosse 7, le 5 centinaja del divisore prese 7 volte formerebbero 35 centinaja, come sono nel dividendo, ma le 4 diecine del divisore prese 7 volte formerebbero 28 diecine, che sono più delle 7 dividendo.

II. Suppongasi, che 6 dinoti il quoto di 3570 per 542. Essendo 30 centinaja il prodotto di 5 centinaja del divisore per 6 unità, sottraendo le 30 centinaja dalle 35, che sono nel dividendo 3570, si ottiene per residuo 5 centinaja, ovvero 50 diecine, che aggiunte alle 7 diecine del dividendo formano 57 diecine. Ma prendendo le 4 diecine del divisore 6 volte, ne risultano 24 diecine, che tolte da 57 diecine poc' anzi ottenute, si ha per residuo 33 diecine, ovvero 330 unità, nel qual numero di unità il numero 2 delle unità del divisore vi si contiene pure 6 volte con un residuo: quindi è chiaro, che 6 debba essere la cifra del quoto, che dinota le centinaja. Si scriva dunque 6 da parte, e 'l prodotto 3252 di 6 per 542 si scriva sotto al numero 3570 del dividendo: dipoi si sottragga 3252 da 3570, ed al residuo 318 centinaja vi si apponga la seguente cifra 8 del dividendo: il numero, che ne risulta, sarà 3188 diecine. E quindi se il numero 3188 fosse minore del divisore 542, nel quoto vi mancherebbero le diecine, ed in tal caso dovrebbe porsi *o* a destra del 6.

III. Ma poichè il numero 3188 è maggiore di 542, il quoto 5 di 3188 per 542 si potrà ottenere collo stesso ragionamento fatto nei numeri I, e II. Si scriva intanto il 5 a destra del 6, e poi si multiplichi il divisore 542 per 5 diecine, e 'l prodotto 2710 diecine si scriva sotto al numero 3188 diecine.

IV. Inoltre, dal numero 3188 diecine si sottragga 2710 diecine, ed al residuo 478 diecine vi si apponga il numero 5 delle unità del dividendo: il numero, che ne risulta, sarà 4785 unità. Onde se questo numero

fosse minore di 542, nel quoto vi mancherebbero le unità, ed in tal caso dovrebbe porsi un *o* a destra del 5. Ma poichè il numero 4785 è maggiore del divisore 542, il quoto 8 di 4785 per 542 si ottiene collo stesso ragionamento fatto nei numeri I, e II. Si scriva dunque il numero 8 a destra del 5, che dinota le diecine del quoto, e 'l prodotto 4336 di 542 per 8 si sottragga da 4785; si avrà per residuo il numero 449. C. B. F.

§. 42. *Cor. I.* E di quì si rileva, che se a sinistra del dividendo si separino tante cifre, tal che da esse si formi un numero non minore del divisore, e da cui cancellandone l' ultima cifra a destra se ne formi un altro minore del divisore medesimo, il quoto dovrà contenere tante cifre quante sono le rimanenti del dividendo ed una di più.

§. 43. *Cor. II.* Inoltre, in ciascuna delle sottrazioni, che devono farsi allora che vuol dividersi un numero per un altro, deve risultarne un residuo minore del divisore dato; poichè se questo residuo fosse uguale o maggiore di quel divisore, il dividendo conterrebbe per lo meno un' altra volta il divisore.

§. 44. *Cor. III.* E poichè un numero si contiene tante volte in un altro quante il primo di essi preso dieci volte si contiene nel secondo preso dieci volte, o quante volte il primo di essi multiplicato per 100 nel secondo preso cento volte, ec., ed i prodotti di quei numeri per 10, per 100, per 1000, ec., si ottengono ponendo alla destra di essi un zero, due zeri, tre zeri, ec. Dunque se in fine del dividendo e del divisore vi sieno alcuni zeri, e da essi si cancelli uno stesso numero di zeri, il quoto della divisione di quei numeri, che risultano, sarà lo stesso di quello, che si sarebbe ottenuto senza toglierne gli zeri.

Esempio. Vogliasi dividere il numero 1637616 per l' altro 327.

I. Si separino a sinistra del dividendo quattro cifre, che formino il numero 1637 non minore del divi-

sore dato 327, ma da cui togliendo l'ultima cifra 7 si abbia il numero 163 minore di 327. Dipoi si dica, il 3 in 16 si contiene 5 volte col residuo 1, e ponendo 1 avanti al 3 terza cifra del dividendo si ha 13, nel quale il 2, seconda cifra del divisore, vi si contiene pure 5 volte, e vi restano 3. Il 3 col 7, quarta cifra del dividendo forma 37, nel qual numero la terza cifra 7 del divisore vi si contiene 5 volte col residuo 2. Dunque dev'esser 5 la prima cifra del quoto.

Dividendo	*Divisore.*
1637619	327
1635	*Quoto*
2619	5008
2616	
Residuo. . . . 3	

II. Si multiplichi ora il 5 poc' anzi ottenuto pel divisore 327, e 'l prodotto 1635 si sottragga dal numero 1637, e si avrà 2 per residuo. Si aggiunga al 2 la quinta cifra 6 del dividendo, e risultando il numero 26 minore del divisore 327, si ponga lo zero dopo del 5, prima cifra del quoto. Dipoi si ponga dopo del 26 la sesta cifra 1 del dividendo, e risultando il numero 261 anche minore del divisore 327, si scriva o per terza cifra del quoto.

III. Finalmente a destra del numero 261 si scriva l'ultima cifra 9 del dividendo, e dovrà risultarne il numero 2619 maggiore del divisore 327. Si dica ora, il 3 prima cifra del divisore, in 26 vi si contiene 8 volte rimanendone 2, il 2 posto avanti ad 1, terza cifra del numero 2619, forma 21, nel quale il 2, seconda cifra del divisore 327, vi si contiene 8 volte sopravanzandone 5. Il 5 posto avanti all'ultima cifra 9 del dividendo fa 59, nel quale il 7 ultima cifra del divisore vi si contiene 8 volte rimanendone 3. Sarà dunque 8 la quarta ed ultima cifra del quoto. Si multiplichi ora 8 per 327, e 'l prodotto 2616 sottraggasi dal numero 2619, e 'l residuo 3 si scriva sotto la linea. Dunque il richiesto quoto sarà 5008.

PROP. X. PROBL.

§. 45. *Esaminare se multiplicando un numero per un altro siasi errato.*

Sol. E poichè in ogni multiplica il prodotto deve contenere tante volte uno dei fattori, quante sono le unità, che si contengono nell' altro fattore; l' è chiaro, che se il prodotto supposto diviso per uno dei fattori dati dia per quoto l' altro fattore, esso dev' essere il vero prodotto di quei due numeri. C. B. F.

PROP. XI. PROBL.

§. 46. *Esaminare se nel dividere un numero per un altro siasi commesso errore.*

Sol. E poichè in ogni divisione il quoto (§. 25.) dinota quante volte il divisore si contenga nel dividendo; l'è chiaro, che se multiplicasi il divisore pel quoto, e la somma di questo prodotto e del residuo della divisione sia uguale al dividendo, la divisione sarà stata bene eseguita. C. B. F.

CAP. III.

DEL CALCOLO DELLE FRAZIONI.

§. 47. *Def. XI.* Se l' unità dividasi in un qualunque numero di parti tra se uguali, ogni espressione che dinoti un numero di quelle, dirassi *numero fratto* o *frazione*.

§. 48. *Scol.* Ogni frazione suol dinotarsi con due numeri, dei quali uno scrivesi sotto una linea, e l'altro sopra. Il primo di essi ne dinota in quante parti uguali fu divisa l' unità, e 'l secondo rappresenta il numero di quelle parti dell' unità, che costituiscono il valore della frazione. Così p. e. se l' unità dividasi in 7 parti

uguali, e di queste se ne prendano 3, la frazione che dinota queste tre parti, sarà $\frac{3}{7}$, che si pronuncia *tre settimi*.

§. 49. *Def. XII.* In ogni frazione il numero, che scrivesi sopra la linea, vien chiamato ***numeratore***, e quello, che scrivesi sotto la linea, chiamasi *denominatore*. E 'l numeratore e 'l denominatore di un fratto considerati insieme si dicono *termini della frazione*.

§. 50. *Cor.* Da quanto si è quassù definito si rileva, che *una frazione è minore, uguale, o maggiore dell' unità secondo che il numeratore di essa è minore, uguale, o maggiore del denominatore*.

§. 51. *Def. XIII.* Il *fratto vero* è quello, che ha il numeratore minore del denominatore. Lo *spurio* poi è quell' altro, il cui numeratore essendo maggiore del denominatore non contiene questo un esatto numero di volte. Laddove chiamasi *fratto apparente* quello, il cui numeratore è uguale, oppure contiene un esatto numero di volte il suo denominatore.

§. 52. *Cor.* Adunque $\frac{3}{8}$ è un fratto vero, poichè il numeratore 3 di esso è minore del denominatore 8, ed è spurio il fratto $\frac{8}{3}$, il cui numeratore 8 essendo maggiore del denominatore 3 non contiene questo un esatto numero di volte. Il fratto poi $\frac{6}{3}$ è apparente, poichè il numeratore 6 di esso contiene il denominatore 3 due volte senza residuo.

PROP. XII. TEOR.

§. 53. *Ogni fratto dinota il quoziente, che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore.*

Dim. Dovendosi dividere p. es. il numero 4 per l' altro 9, si vuol trovare un numero, che preso 9 volte (§. 46.) pareggi 4. Ma poichè la nona parte dell' u-

nità, o sia $\frac{1}{9}$ presa 9 volte è uguale a $\frac{9}{9}$, ovvero ad 1, il quadruplo di $\frac{1}{9}$, ovvero $\frac{4}{9}$ preso 9 volte dee pareggiare 4. Dunque la frazione $\frac{4}{9}$ dee pure dinotare il quoto che si ha dividendo 4 per 9. C. B. D.

§. 54. *Cor. I.* E poichè il denominatore di un fratto apparente (§. 51.) si contiene un esatto numero di volte nel numeratore di esso, il quoto che si ha dividendo il numeratore di quel fratto per lo denominatore dee pareggiare un certo numero di unità. Vale a dire, che *ogni fratto apparente contiene un esatto numero di unità.*

§. 55. *Cor. II.* Se dividasi il numeratore di un fratto spurio pel denominatore, si ottiene un certo numero di unità per quoto, ed un residuo. Or di questo residuo dovendosene prendere tal parte, che vien dinotata dal divisore, l'è chiaro, che quel fratto spurio debba pareggiare il detto quoto insieme con un fratto, il cui numeratore è il residuo della divisione, e 'l denominatore è quello stesso del fratto proposto. Così p. es. contenendosi il 7 nel 19 due volte col residuo 5, dev' essere $7 \times 2 + 5 = 19$, e 'l fratto $\frac{19}{7}$ dee pareggiare $\frac{7 \times 2 + 5}{7}$ ovvero questi due $\frac{14}{7} + \frac{5}{7}$. Ma il fratto apparente $\frac{14}{7}$ è uguale (§. 54.) a 2. Dunque dev'essere pure $\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}$.

§. 56. *Cor. III.* E perciò in ogni divisione, che non avvenga esatta, il residuo dovrà scriversi a destra del quoto sopra una linea, e sotto di questa vi si dovrà scrivere il divisore.

§. 57. *Cor. IV.* E di quì si rileva, I. Che *per ridurre un fratto spurio ad intiero e fratto, convien dividere il numeratore di esso pel denominatore, il quoziente dovrà dinotare il numero delle unità, che si contengono in esso fratto, e 'l residuo sarà il nu-*

meratore di quel fratto, che avendo lo stesso denominatore del proposto dee aggiungersi al medesimo quoziente. II. *Che per ridurre un fratto apparente ad un numero intiero convien dividere il numeratore di esso pel denominatore, il quoto sarà uguale al fratto proposto.*

Esempio. Ridurre il fratto spurio $\frac{25}{7}$ ad intiero e fratto. Si divida il numeratore 25 del proposto fratto pel denominatore 7 di esso, ed al quoto 3 vi si aggiunga il fratto $\frac{4}{7}$, che abbia per numeratore il residuo 4 di tal divisione e per denominatore il denominatore 7 del fratto proposto. Sarà $\frac{25}{7}=3+\frac{4}{7}$.

PROP. XIII. TEOR.

§. 58. *Ogni fratto non cambia di valore se il numeratore e 'l denominatore di esso si multiplichino per uno stesso numero.*

Dim. Poichè p. es. la frazione $\frac{3}{7}$ dinota che l'unità è stata divisa in 7 parti uguali (§. 47.), di cui se ne son prese 3; l'è chiaro, che se ciascuna di quelle 7 parti si divida in due parti uguali, ognuna di quelle, che ne risulta, dev'essere la metà di ciascuna delle 7 parti, in che fu da prima l'unità divisa. Vale a dire, che $\frac{1}{14}$ è la metà di $\frac{1}{7}$. Dunque dev'essere $\frac{2}{14}$ uguale ad $\frac{1}{7}$. Il perchè il triplo di $\frac{1}{7}$ dev'essere pure uguale al triplo di $\frac{2}{14}$. Ma il triplo di $\frac{1}{7}$ è $\frac{3}{7}$, e 'l triplo di $\frac{2}{14}$ è $\frac{6}{14}$. Dunque dev' essere $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$. E quindi essendo i termini 6 e 14 del secondo fratto i respettivi prodotti dei termini 3 e 7 del primo fratto per lo stesso numero

2, ne siegue che il fratto $\frac{3}{7}$ non cambia di valore se i termini di esso si multiplichino pel numero 2. Nella stessa guisa potrebbe dimostrarsi, che se il numeratore e 'l denominatore di un fratto si multiplichino per qualunque altro numero, il valore del fratto resta lo stesso. C. B. D.

§. 59. *Cor. I.* E di quì si rileva, che se il numeratore e 'l denominatore di un fratto sieno divisibili esattamente per un medesimo numero, i quozienti, che si ottengono dividendo i termini di esso fratto per quel numero, ne dovranno respettivamente dinotare il numeratore e 'l denominatore di un altro fratto, che dee pareggiare il proposto, e che è ridotto ad una più semplice espressione.

§. 60. *Cor. II.* Essendo il numero 3 lo stesso che il fratto apparente $\frac{3}{1}$, questo fratto non dovrà mutare il suo valore multiplicandone il numeratore e 'l denominatore per un qualunque numero, come per es. per 5. Il perchè dovrà essere $\frac{3}{1}$, ovvero 3 uguale a $\frac{15}{5}$. Vale a dire, che *un qualunque numero intiero si riduce ad un fratto di un dato denominatore multiplicando esso numero pel detto denominatore, e scrivendo sotto un tal prodotto lo stesso denominatore.*

§. 61. *Def. XIV.* Chiamasi *numero primo* quello, che non risulta multiplicando tra loro altri numeri intieri ciascuno maggiore di 1. Tali sono i numeri 2, 5, 7, 11, 13, ec.

§. 62. *Def. XV.* Due numeri si dicono *tra se primi* allora che non hanno altro fattore comune all'infuori dell'unità. Tali sono i numeri 5 e 9, 7 e 13, 36 e 49 ec.

§. 63. *Cor. I.* Dunque se il numeratore e 'l denominatore di un fratto sieno numeri tra se primi, quel fratto non potrà ridursi ad un altro dello stesso valore e di una più semplice espressione (§. 59.).

§. 64. *Cor. II.* E se il numeratore e 'l denomi-

natore di un fratto non sieno numeri tra se primi, per ridurre quel fratto ad un altro dello stesso valore, ma della più semplice espressione, converrà dividere il numeratore e 'l denominatore di esso pel loro massimo fattore comune. Così per es. essendo 2, 4 ed 8 i fattori comuni dei numeri 24 e 560, il fratto $\frac{24}{560}$ potrà ridursi alla più semplice espressione se dividasi il numeratore e 'l denominatore di esso pel numero 8, che è il massimo tra quei fattori comuni.

§. 65. *Def. XVI.* La *riduzione di un fratto a minimi termini* consiste nell' esibirne un altro dello stesso valore di esso, e di cui il numeratore e 'l denominatore sieno numeri tra se primi (§. 63.).

§. 66. *Def. XVI.* La *massima comune misura* di due numeri è il loro massimo comune fattore.

§. 67. *Cor. I.* Dunque affinchè un fratto possa ridursi a minimi termini (§. 65.), l'è mestieri determinare la massima comune misura dei termini di esso.

§. 68. *Cor. II.* La massima comune misura di due numeri dev' essere il minore di essi numeri, se questo si contenga esattamente nel maggiore.

PROP. XIV. PROBL.

§. 69. *Dati due numeri, determinare la loro massima comune misura.*

Sol. I. Si divida il maggiore di quei numeri pel minore, e se da questa divisione non si ottenga alcun residuo, il minore dei numeri dati dovrà dinotare la massima comune misura tra esso e 'l maggiore (§. 68.).

II. Che se poi dalla detta divisione si ottenga un residuo, si divida il minore dei numeri dati per questo residuo, il quale sarà la massima comune misura, che si domanda, se in questa divisione non vi sia residuo.

III. Inoltre, se nella seconda divisione si ottenga un residuo si divida il residuo della prima divisione per quello della seconda: e se in questa divisione non si

ottenga alcun residuo, il residuo della seconda divisione sarà la massima comune misura, che cercasi. Altrimenti dovrà dividersi il residuo della penultima divisione per quello dell'ultima, e nello stesso modo dovrà procedersi in seguito finchè si pervenga ad un residuo, il quale divida esattamente quello della penultima divisione.

Sarà l'ultimo residuo il massimo comune fattore tra i numeri dati: e questi saranno tra se primi, se quell'ultimo residuo sia 1.

Esempio. Determinare il massimo comune divisore dei numeri 438 e 102.

Quoto della seconda divisione	438	102	*Quoto della prima divisione*
3	408	90	4
Quoto della quarta divisione	30	12	*Quoto della terza divisione*
	24		
2	6		2

Dividasi il maggiore dei numeri dati 438 pel minore 102. Si avrà 4 per quoto, e 30 per residuo. Dipoi si divida il minore di essi numeri 102 pel residuo 30. Si otterrà 3 per quoto e 12 per residuo. Inoltre si divida il primo residuo 30 pel secondo 12. Dovrà risultarne 2 per quoto e 6 per residuo. Finalmente il penultimo residuo 12 si divida per l'ultimo 6. Si otterrà 2 per quoto, e zero per residuo. Sarà 6 il massimo comune fattore dei numeri 438 e 102.

Dim. Poichè il numero 438 contiene 4 volte l'altro 102 rimanendovi 30, dev' essere

$$438=102+102+102+102+30,$$

e 'l quoto, che si ottiene dividendo 438 per la massima comune misura domandata, dee pareggiare il quoziente di 102 per la massima comune misura preso quattro volte aggiuntovi il quoto di 30 per lo stesso massimo comun fattore. Ma il quoto di 438 per la massima comune misura domandata è un numero intiero senza residuo, e 'l quoto di 102 per la stessa massima comune misura è pure un numero intiero. Dunque dev'essere pure il quoto

di 30 per la massima comune misura un numero intiero; poichè se tal quoto fosse un fratto vero o spurio, ne seguirebbe, che il numero intiero ottenuto dividendo 438 per lo massimo comun fattore dovrebbe pareggiare quel numero intiero, che è quadruplo del quoto di 102 per la massima comune misura, insieme collo stesso fratto, il che ripugna. Il perchè quella massima comune misura dev'essere la stessa, che l'altra dei numeri 102 e 30. Ma dividendo 102 per 30 si ottiene 3 per quoto e 12 per residuo. Dunque il numero 102 è lo stesso di 30+30+30+12. Onde collo stesso ragionamento di poc' anzi si potrà rilevare, che la massima comune misura dei numeri 102 e 30 sia la stessa, che l'altra dei numeri 30 e 12. Ma il 12 si contiene in 30 due volte col residuo 6. Dunque la massima comune misura tra 30 e 12 dev'essere quella stessa dei numeri 6 e 12. E quindi contenendosi il 6 nel 12 due volte senza residuo, sarà 6 la massima comune misura tra 12 e 30, o tra 30 e 102, o finalmente tra 102 e 438, che sono i numeri dati. C. B. F.

§. 70. *Cor.* Il perchè se debbasi ridurre a minimi termini il fratto $\frac{102}{438}$, convien prima determinare la massima comune misura 6 tra i termini 102 e 438 di esso, e poi dividere quei termini per questa massima comune misura: onde ne dovrà risultare $\frac{102}{438}=\frac{17}{73}$.

§. 71. *Def. XVIII.* La *riduzione di più fratti al medesimo denominatore* consiste nell'esibirne altrettanti, che sieno respettivamente uguali ai proposti, ed abbiano un medesimo denominatore.

PROP. XV. PROBL.

§. 72. *Date più frazioni, ridurle allo stesso denominatore.*

Sol. Si multiplichi il numeratore e 'l denominatore di ciascun fratto pel prodotto dei denominatori di tutti

gli altri. Le frazioni, che ne risultano, saranno quelle, che si domandano.

Dim. Poichè il denominatore di una qualunque delle frazioni ottenute essendo il prodotto di tutti i denominatori delle frazioni proposte, sarà lo stesso in ciascuna di esse. Ma il numeratore, e 'l denominatore di ciascuna delle frazioni proposte si sono multiplicati pel prodotto dei denominatori di tutte le altre frazioni. Dunque i fratti, che con tale operazione si ottengono, devono essere respettivamente uguali ai dati (§. 58.). C. B. F.

Esempio. Sieno le frazioni $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{9}$, che si vogliano ridurre allo stesso denominatore. Si multiplichi il denominatore 7 del primo fratto pel denominatore 5 del secondo, e 'l prodotto 35 si multiplichi per 9 denominatore del terzo fratto. Dipoi il prodotto 315 di 35 per 9 si scriva sotto ciascuna di tre linee orizzontali, poichè esso deve dinotarne il comune denominatore dei fratti ridotti. Inoltre, essendosi multiplicato il denominatore 7 del primo fratto pel prodotto dei denominatori 5 e 9 degli altri due, o sia per 45, converrà multiplicare anche per 45 il numeratore 3 del primo fratto: essendosi multiplicato il denominatore 5 del secondo fratto pel prodotto 63 dei denominatori 7 e 9 degli altri due, converrà multiplicare anche per 63 il numeratore 4 di esso: ed essendosi multiplicato il denominatore 9 del terzo fratto pel prodotto 35 degli altri due denominatori, converrà multiplicare benanche per 35 il numeratore 5 del terzo fratto. Ma il prodotto di 45 per 3 pareggia 135, il prodotto di 4 per 63 adegua 252, e 'l prodotto di 5 per 35 è uguale a 175. Dunque le tre frazioni $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$ devono essere respettivamente uguali ai fratti proposti.

§. 73. *Cor. I.* Qualora il denominatore di uno dei fratti proposti divida esattamente il denominatore di un altro fratto, si può semplificare la riduzione di essi allo

stesso denominatore. Infatti suppongasi p. es., che si vogliano ridurre allo stesso denominatore le tre frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{12}$, di cui il denominatore 3 della prima si contiene 4 volte nel denominatore 12 della terza senza residuo. Dovrà essere $12=4 \cdot 3$. Onde se col metodo precedente (§. 72.) si volessero ridurre le proposte frazioni allo stesso denominatore, il denominatore comune delle frazioni ridotte sarebbe $3 \cdot 5 \cdot 12$, ovvero $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$, il numeratore del primo fratto sarebbe $2 \cdot 5 \cdot 12$, ovvero $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$, il numeratore del secondo sarebbe $4 \cdot 3 \cdot 12$, ovvero $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4$, e 'l numeratore del terzo fratto sarebbe $5 \cdot 3 \cdot 5$. Vale a dire che i fratti ridotti ne verrebbero indicati dai seguenti:

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ e } \frac{5 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4},$$

in ciascuno dei quali evvi tanto nel numeratore, che nel denominatore il fattore 3. Il perchè se tolgasi dai termini di queste frazioni (§. 58.) il comune fattore 3, dovranno emergerne le seguenti

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 4}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 4}, \text{ e } \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 4},$$

ovvero le altre

$$\frac{40}{60}, \frac{48}{60}, \text{ e } \frac{25}{60},$$

che devono essere respettivamente uguali alle proposte.

§. 74. *Cor. II.* Allorà che due o più fratti sono ridotti allo stesso denominatore si può conoscere quali di essi sia il maggiore. Di fatti prima di ridurre p. es. i fratti $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{9}$ allo stesso denominatore, non si può asserire quale di essi ne sia il maggiore; poichè il primo dinota 3 parti (§. 47.) dell' unità divisa in 7 parti uguali, e 'l secondo rappresenta 5 delle 9 parti uguali in che si è divisa un' altra simile unità, onde una delle prime parti deve differire da una delle seconde. Ma riducendo quei fratti allo stesso denominatore si trova,

che il primo è uguale a $\frac{27}{63}$ e 'l secondo a $\frac{35}{63}$. Dunque il secondo fratto è maggiore del primo.

PROP. XVI. PROBL.

§. 75. *Date più frazioni, prenderne la loro somma.*

Sol. Cas. I. Se le proposte frazioni abbiano un denominatore comune, la somma di esse sarà uguale a quel fratto, il cui numeratore pareggia la somma dei numeratori dei fratti proposti, e 'l denominatore è quello stesso di questi fratti.

Cas. II. Che se poi le proposte frazioni abbiano diversi denominatori, converrà prima ridurle allo stesso denominatore, e poi di queste prenderne la somma come nel Cas. I.

Esempio. Si voglia la somma delle frazioni

$\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{9}$.

Le proposte frazioni si riducano alle altre $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$ e $\frac{175}{315}$, che hanno 315 per comune denominatore (§. 72.). Dipoi si prenda la somma 562 dei numeratori 135, 252, e 175 dei fratti ridotti. Sarà la somma delle frazioni proposte, cioè $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}+\frac{5}{9}$ uguale al fratto $\frac{562}{315}$.

Dim. Poichè i fratti proposti $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{9}$ sono respettivamente uguali agli altri $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$ (§. 72), sarà la somma di questi uguale alla somma di quelli. Ma ogni unità del numeratore di ciascuno di questi tre secondi fratti ne dinota la trecento-quindicesima parte di 1. Dunque la somma dei fratti $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$ deve pareggiare la trecento-quindicesima parte dell'unità presa tante volte, quante sono le unità, che si contengono

nella somma dei tre numeri 135, 252, e 175, o sia nel numero 562. E perciò dev' essere $\frac{562}{315}$ la somma delle tre frazioni $\frac{135}{315}$, $\frac{252}{315}$, e $\frac{175}{315}$, ovvero delle altre tre $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{9}$. C. B. F.

§. 76. *Cor. I.* Qualora la somma di più frazioni risulta uguale ad un fratto spurio, si può questo ridurre ad intiero e fratto (§. 57.). Così p. es. essendo il fratto spurio $\frac{562}{315}$ uguale alla somma dei tre fratti $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{9}$, se dividasi il numeratore 562 di quel fratto spurio pel denominatore 315 di esso, il quoto 1 di tal divisione aggiunto al residuo 247 diviso per 315 sarà uguale a $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}+\frac{5}{9}$; cioè dovrà essere $\frac{3}{7}+\frac{4}{5}+\frac{5}{9}=1+\frac{247}{315}$.

§. 77. *Cor. II.* Inoltre, se debbano sommarsi numeri intieri uniti a frazioni, converrà prima prendere la somma delle frazioni, e poi prendere la somma degl'intieri. E se la somma delle frazioni risulti uguale ad un fratto apparente o spurio, sarà mestieri togliere da questo fratto (§. 55.) le unità, che vi si contengono, ed aggiungerle alla somma dei numeri intieri dati. Questa somma insieme col numero intiero, che ne risulta, sarà la somma degl' intieri e dei fratti proposti.

PROP. XVII. PROBL.

§. 78. *Dati due fratti disuguali, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Cas. I. Se i fratti dati abbiano lo stesso denominatore, la loro differenza dovrà pareggiare un fratto, il cui numeratore sarà uguale al numeratore del diminuendo toltone l'altro del sottrattore, e 'l denominatore sarà quello, che è comune alle frazioni date.

Cas. II. Che se le frazioni proposte abbiano diversi denominatori, converrà ridurle allo stesso deno-

minatore, e poi prendere di queste la differenza come nel Cas. I.

Esempio. Si voglia sottrarre dal fratto $\frac{7}{9}$ l'altro $\frac{3}{5}$.

I fratti proposti ridotti allo stesso denominatore sono respettivamente (§. 72.) uguali a $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$, di cui la differenza dei numeratori 35 e 27 è 7. Dunque la differenza dei fratti $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$, ovvero degli altri $\frac{7}{9}$ e $\frac{3}{5}$ dee pareggiare $\frac{7}{45}$.

Dim. Poichè i fratti proposti $\frac{7}{9}$ e $\frac{3}{5}$ sono respettivamente uguali agli altri due $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$, sarà la differenza di questi uguale alla differenza di quelli. Ma ogni unità del numeratore di ciascuno di questi secondi fratti ne dinota la quarantacinquesima parte di 1. Dunque la differenza dei fratti $\frac{35}{45}$ e $\frac{27}{45}$ deve pareggiare la quarantacinquesima parte della differenza tra 27 e 35, cioè $\frac{7}{45}$. E quindi dev' essere anche $\frac{7}{9}-\frac{3}{5}=\frac{7}{45}$... C. B. F.

§. 79. *Cor. I.* Se da un numero intiero se ne debba togliere un fratto, converrà ridurre una unità dell' intiero a fratto dello stesso denominatore del proposto (§. 60.), e poi il sottrattore dato si dovrà togliere da quell' unità ridotta a fratto. Il residuo, che si otterrà, aggiunto al numero intiero dato diminuito di 1, dovrà essere il residuo della sottrazione proposta. Così p. es. dovendosi sottrarre dal numero 5 il fratto $\frac{2}{7}$, dovrà ridursi una unità del 5 al fratto $\frac{7}{7}$, che ha per denominatore il numero 7 denominatore di $\frac{2}{7}$. E quindi

essendo $5=4+\frac{7}{7}$, la differenza tra 5 e $\frac{2}{7}$ dev'essere la stessa di quella, che si ha sottraendo $\frac{2}{7}$ da $4+\frac{7}{7}$; cioè dev'essere $5-\frac{2}{7}=4+\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=4+\frac{5}{7}$.

§. 80. *Cor. II.* Che se da un numero intiero unito ad una frazione se ne debba togliere un altro intiero con una frazione, sarà mestieri ridurre le due frazioni ad un medesimo denominatore: dipoi queste nuove frazioni si dovranno aggiungere a quei numeri intieri, e se la frazione, che trovasi nel sottrattore sia minore o uguale a quella, che trovasi nel diminuendo, si dovrà sottrarre il fratto dal fratto, e l'intiero dall'intiero. Ma se la frazione, che trovasi nel sottrattore sia maggiore di quella del diminuendo, converrà ridurre una unità di questo ad un fratto dello stesso denominatore dell'altro, che sta unito al numero intiero del diminuendo medesimo. Di poi dal numero, che resta nel diminuendo e dal fratto, che vi era, insieme coll'altro, che è uguale all'unità, si dovrà togliere il sottrattore.

Esempio I. Sottrarre $3\frac{2}{5}$ da $8\frac{6}{15}$.

I fratti $\frac{2}{5}$ e $\frac{6}{15}$ sono uguali tra loro; poichè moltiplicando il numeratore e 'l denominatore del primo per 3 si ha il secondo. E quindi sarà lo stesso sottrarre $3\frac{2}{5}$ da $8\frac{6}{15}$, che $3\frac{2}{5}$ da $8\frac{2}{5}$. Ma $8\frac{2}{5}$ diminuito di $3\frac{2}{5}$ adegua 5. Dunque dev' essere

$$8\frac{6}{15}-3\frac{2}{5}=5.$$

Esempio II. Sottrarre da $7\frac{2}{5}$ l'intiero e fratto $3\frac{4}{7}$.

Riducendo i fratti $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{7}$ allo stesso denominatore

si ha $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$, e $\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$. Il perchè sarà lo stesso sottrarre $3\frac{4}{7}$ da $7\frac{2}{5}$, che $3\frac{20}{35}$ da $7\frac{14}{35}$. Ma per esserne $\frac{20}{35}$ maggiore di $\frac{14}{35}$, non si potrà sottrarre $\frac{20}{35}$ da $\frac{14}{35}$ e 3 da 7. Onde è mestieri ridurre una unità del 7 ad un fratto, che abbia 35 per denominatore. E quindi il diminuendo proposto sarà lo stesso che $6+\frac{35}{35}+\frac{14}{35}$, o sia sarà lo stesso che $6+\frac{49}{35}$. Dunque il residuo, che si domanda, dovrà pareggiare $6+\frac{49}{35}-3-\frac{20}{35}$. Ma $6-3$ adegua 3, e $\frac{49}{35}-\frac{20}{35}$ è uguale a $\frac{29}{35}$. Dunque dev' essere $6+\frac{49}{35}-3-\frac{20}{35}$, o sia $7\frac{2}{5}-3\frac{4}{7}=3\frac{29}{35}$.

PROP. XVIII. PROBL.

§. 81. *Dati due fratti, multiplicare l' uno di essi per l' altro.*

Sol. Si multiplichi il numeratore di uno dei fratti dati pel numeratore dell' altro, e 'l denominatore del primo si multiplichi pel denominatore del secondo. Il prodotto dei fratti proposti sarà un altro fratto, che avrà per numeratore il primo prodotto, e per denominatore il secondo.

Esempio. Sieno dati i due fratti $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{5}$, fa duopo multiplicare il primo di essi pel secondo.

Si multiplichino tra loro non solo i numeratori 4 e 3 di quei fratti, ma benanche i denominatori 7 e 5 di essi. Il fratto $\frac{12}{35}$, che ha per numeratore il primo prodotto 12, e per denominatore il secondo 35, do-

vrà essere il prodotto di $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$.

Dim. Poichè multiplicando tanto il numeratore che il denominatore del fratto $\frac{4}{7}$ pel denominatore 5 del secondo, esso non cambia (§. 58.) di valore, e 'l numeratore 20 del fratto $\frac{20}{35}$, che ne risulta, diviso per 5 dà 4 per quoto senza residuo. Dunque la quinta parte di $\frac{20}{35}$, ovvero di $\frac{4}{7}$ dev' essere $\frac{4}{35}$. Il perchè il triplo della quinta parte di $\frac{4}{7}$ deve pareggiare il triplo di $\frac{4}{35}$, ovvero $\frac{12}{35}$. E perciò $\frac{12}{35}$ dev'essere il prodotto di $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$. C. B. F.

§. 82. *Cor. I.* E di quì si rileva, che dovendosi multiplicare il fratto $\frac{4}{35}$ pel numero intiero 3, convien multiplicare il numeratore 4 di quello per questo numero intiero, e 'l fratto $\frac{12}{35}$, che ha per numeratore quel prodotto, e per denominatore il denominatore del fratto proposto, dev' essere il prodotto cercato. Vale a dire, che *il prodotto di un numero intiero per un fratto pareggia un altro fratto, il cui numeratore è il prodotto del numero intero pel numeratore del fratto dato, e 'l denominatore è quello di esso fratto.*

§. 83. *Cor. II.* Se debbasi multiplicare un numero intiero per un fratto, che abbia per denominatore esso numero intiero, il prodotto dovrà pareggiare il numeratore di quel fratto. Difatti dovendosi multiplicare il numero intiero 7 pel fratto $\frac{5}{7}$ il prodotto dovrà pareggiare $\frac{35}{7}$, che è uguale al numeratore 5 del fratto $\frac{5}{7}$.

§. 84. *Cor. III.* E se debbansi multiplicare due

fratti, di cui il primo abbia per denominatore quel numero, che è numeratore del secondo, il prodotto di essi sarà un fratto, che avrà per numeratore quello del primo fratto, e per denominatore il denominatore del secondo. Così p. es. dovendosi multiplicare il fratto $\frac{5}{7}$ per l'altro $\frac{7}{9}$, il prodotto sarà il fratto $\frac{35}{63}$, di cui il numeratore e 'l denominatore hanno per fattore comune il numero 7. Onde esso ridotto a minimi termini si convertirà nell' altro $\frac{5}{9}$, di cui il numeratore è quello del fratto $\frac{5}{7}$, e 'l denominatore adegua il denominatore di $\frac{7}{9}$.

§. 85. *Cor. IV.* E poichè $2\frac{3}{5}$ pareggia $\frac{13}{5}$, e $4\frac{5}{7}$ è uguale (§. 60.) a $\frac{33}{7}$, dev'essere il prodotto di $2\frac{3}{5}$ per $4\frac{5}{7}$ uguale a quello di $\frac{13}{5}$ per $\frac{33}{7}$. Ma il prodotto (§. 81.) di $\frac{13}{5}$ per $\frac{33}{7}$ pareggia il fratto $\frac{429}{35}$. Dunque *se debbasi multiplicare un numero intiero unito ad una frazione per un numero intiero ancora unito ad un fratto, sarà mestieri ridurre ciascuno intiero col suo fratto ad un sol fratto* (§. 60.), *e di poi multiplicare tra loro le due frazioni, che ne risultano.*

PROP. XIX. PROBL.

§. 86. *Dati due fratti, dividere l'uno di essi per l'altro.*

Sol. Si multiplichi il numeratore del fratto dividendo pel denominatore del fratto divisore, e 'l denominatore del primo fratto pel numeratore del secondo. Il quoziente, che si domanda, dev' essere quel fratto, che ha per numeratore il primo prodotto, e per denominatore il secondo.

Esempio. Sieno date le frazioni $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{7}$, fa duopo dividere $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$.

Si multiplichi il numeratore 5 del dividendo $\frac{5}{8}$ pel denominatore 7 del divisore $\frac{3}{7}$, e 'l denominatore 8 del primo fratto pel numeratore 3 del secondo. Il fratto $\frac{35}{24}$, che ha per numeratore il primo prodotto 35 e per denominatore il secondo prodotto 24, dev' essere il quoto di $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$.

Dim. Poichè se il fratto $\frac{35}{24}$, ovvero l' altro $\frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 3}$ non fosse il quoto di $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$, il prodotto di esso pel divisore $\frac{3}{7}$ non dovrebbe pareggiare il divisore. Ma il prodotto di $\frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 3}$ per $\frac{3}{7}$ adegua $\frac{5 \cdot 7 \cdot 3}{8 \cdot 3 \cdot 7}$, ovvero $\frac{5}{8}$ (§. 64.) che è il dividendo dato. Dunque il fratto $\frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 3}$, ovvero l'altro $\frac{35}{24}$ deve essere il quoto di $\frac{5}{8}$ per $\frac{3}{7}$. C.B.F.

§. 87. *Cor. I.* Dunque se il numeratore del fratto dividendo adegui quello del fratto divisore, il quoto dovrà essere quel fratto, che avrà per numeratore il denominatore del divisore e per denominatore il denominatore del fratto dividendo. E se il denominatore del fratto dividendo adegui il denominatore del fratto divisore, il quoto sarà quell' altro fratto, che avrà per numeratore il numeratore del fratto dividendo, e per denominatore il numeratore del fratto divisore (§. 84.).

§. 88. *Cor. II.* Se vogliasi dividere un numero intiero per un fratto, o pure un fratto per un intiero, conviene esibire l'intiero per un fratto, che abbia esso

intiero per numeratore e l' unità per denominatore. Così per esempio volendo dividere il numero intiero 2 pel fratto $\frac{5}{7}$, bisognerà scrivere $\frac{2}{1} : \frac{5}{7}$, e 'l quoto sarà il fratto $\frac{14}{5}$, che ha per numeratore il prodotto dell'intiero pel denominatore del fratto, e per denominatore il numeratore del fratto. E se vogliasi dividere $\frac{5}{7}$ per 2, ovvero $\frac{5}{7}$ per $\frac{2}{1}$, il quoto sarà il fratto $\frac{5}{14}$, che ha per numeratore il numeratore del fratto e per denominatore il prodotto del numero intiero pel denominatore del fratto.

§. 89. *Cor. II.* E poichè $2\frac{3}{5}$ pareggia $\frac{13}{5}$, e $5\frac{7}{9}$ è uguale a $\frac{52}{9}$, il quoto di $2\frac{3}{5}$ per $5\frac{7}{9}$ dee pareggiare $\frac{117}{260}$, che si ottiene dividendo $\frac{13}{5}$ per $\frac{52}{9}$. Vale a dire, che *se vogliasi dividere un numero intiero unito ad una frazione per un numero intiero unito anche ad un fratto, converrà ridurre ciascun numero intiero col suo fratto ad una sola frazione* (§. 60.), *e poi dividere la prima, che ne risulta, per la seconda* (§. 86.).

§. 90. *Def. XIX.* Se una frazione si divida in parti tra se uguali, e di queste se ne prenda un numero qualunque, l' espressione che dinota il numero delle parti già prese della frazione, dicesi *fratto di fratto*.

§. 91. *Scol.* Suppongasi, che la frazione $\frac{5}{7}$ si divida in 9 parti uguali, delle quali se ne prendano 4, l' espressione, che dinota queste 4 parti è quella, che dicesi frazione di frazione, ed essa dovrà scriversi in questa guisa $\frac{4}{9}\Big|\frac{5}{7}$, che si pronuncia *quattro noni di cinque settimi*.

§. 92. *Def. XX.* Se una frazione di frazione si divida in parti tra se uguali, e di queste se ne prenda un qualunque numero, l' espressione, che dinoterà il numero di dette parti, chiamasi *frazione di frazione di frazione*. Tal' è p. es. $\frac{4}{9}\Big|\frac{5}{7}\Big|\frac{2}{3}$, che si pronuncia $\frac{4}{9}$ di $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{3}$. Nella stessa guisa potrebbe formarsi la definizione del *fratto di fratto di fratto di fratto*, ec.

PROP. XX. PROBL.

§. 93. *Data una frazione di frazione, ridurla a fratto semplice.*

Sol. Sia data la frazione di frazione $\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5}$, bisogna ridurla a fratto semplice.

Si multiplichino tra loro i numeratori ed i denominatori delle frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{5}$. Il fratto $\frac{12}{35}$, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e per denominatore il prodotto dei denominatori di quelle frazioni, sarà uguale a $\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5}$.

Dim. Poichè $\frac{4}{5}$ è uguale a $\frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7}$, ovvero a $\frac{4 \cdot 7}{35}$, deve essere la settima parte di $\frac{4}{5}$ uguale alla settima parte di $\frac{4 \cdot 7}{35}$, ovvero a $\frac{4}{35}$. Dunque il triplo della settima parte di $\frac{4}{5}$ dee pareggiare il triplo di $\frac{4}{35}$. Ma il triplo di $\frac{4}{35}$ è uguale a $\frac{12}{35}$. Dunque dev' essere $\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5} = \frac{12}{35}$. C. B.

§. 94. *Cor.* E poichè $\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5}$ è uguale a $\frac{12}{35}$, dev'essere $\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5}\Big|\frac{2}{11} = \frac{12}{35}\Big|\frac{2}{11}$. Ma $\frac{12}{35}\Big|\frac{2}{11}$ adegua (§. 93.) il fratto

semplice $\frac{24}{385}$. Dunque dev' essere $\frac{3}{7}\Big|\frac{4}{5}\Big|\frac{2}{11} = \frac{24}{385}$. Nello stesso modo si potrebbero ridurre a semplici fratti le frazioni di frazioni di frazioni di frazioni, ec.

C A P. IV.

DEL CALCOLO DEI FRATTI DECIMALI.

§. 95. *Def. XXI. Fratti decimali* si dicono quelli, i cui denominatori scrivonsi coll'unità, ed uno o più zeri verso la destra. Tali sono i fratti $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10000}$, $\frac{7}{1000000}$, ec.

§. 96. *Cor. I.* Dunque i fratti decimali di diversi denominatori si possono facilmente ridurre allo stesso denominatore; poichè il denominatore di uno di essi è sempre uno dei fattori del denominatore dell' altro (§. 73.). Così p. es. il denominatore 10 del fratto $\frac{3}{10}$ è fattore del denominatore 10000 dell' altro fratto $\frac{5}{10000}$. Il perchè essendo 1000 il quoto, che risulta dividendo 10000 per 10, se multiplicasi per 1000 tanto il numeratore che il denominatore del fratto $\frac{3}{10}$, ne dovrà risultare l' altro $\frac{3000}{10000}$, che ha lo stesso denominatore del fratto $\frac{5}{10000}$.

§. 97. *Cor. II.* E poichè il numero 30574 pareggia $30000+500+70+4$, la somma dei fratti decimali $\frac{30000}{10000}$, $\frac{500}{10000}$, $\frac{70}{10000}$, e $\frac{4}{10000}$ dee pareggiare il (§. 75.) fratto $\frac{30574}{10000}$. Ma il fratto $\frac{30000}{10000}$ adegua (§. 53.) il numero intiero 3, il fratto $\frac{500}{10000}$ è uguale (§. 59) a $\frac{5}{100}$, e

l'altro $\frac{70}{10000}$ pareggia $\frac{7}{1000}$. Dunque il fratto decimale $\frac{30574}{10000}$ è la somma di 3 unità, di 5 centesime, di 7 millesime, e di 4 diecimillesime; ovvero il fratto decimale $\frac{30574}{10000}$ è la somma di 3 unità, di zero decime, di 5 centesime, di 7 millesime, di 4 diecimillesime: ed il fratto $\frac{574}{10000}$ è la somma di 5 centesime, di 7 millesime, e di 4 diecimillesime; ovvero il fratto $\frac{574}{10000}$ è la somma di zero unità, di zero decime, di 5 centesime, di 7 millesime, e di 4 diecimillesime. Vale a dire, che *se dalla destra verso la sinistra del numeratore di un fratto decimale si separino con una virgola tante cifre quanti sono gli zeri del denominatore dello stesso fratto, e se non bastino si suppliscano le cifre mancanti verso la sinistra con gli zeri, e poi avanti all'ultima cifra verso la stessa parte si ponga una virgola; la prima cifra a destra dopo la virgola dinoterà le parti decime, la seconda dopo la virgola dinoterà le parti centesime, la terza le parti millesime, e così in appresso: quelle cifre poi, che talvolta si trovino avanti la virgola dovranno dinotare numeri intieri.*

§. 98. *Cor. III.* E per tal ragione i fratti decimali si sogliono dinotare coi soli numeratori, avvertendo di scrivere prima un zero se non vi sieno numeri intieri, poi una virgola, in seguito le parti decime, dipoi le centesime, indi le millesime, e così in appresso: e se manchino alcune di queste parti, la loro mancanza si supplisca con gli zeri. Così per es. per dinotare il fratto decimale $\frac{30754}{10000}$, che è (§. 97) la somma di 3 unità, di 5 centesime, di 7 millesime, e di 4 diecimillesime, si separino mediante una virgola dal numeratore 30574 di esso, e dalla destra verso la si-

nistra, quattro cifre, quanti sono gli zeri del denominatore 10000, e dopo la quarta cifra verso la sinistra si scriva una virgola: onde quel fratto verrà dinotato da 3,0574. Ed essendo tre le cifre del numeratore del fratto decimale $\frac{574}{10000}$, il cui denominatore contiene quattro zeri, dovrà porsi avanti al 5 un zero, ed avanti a questo una virgola, e poi un zero: e quindi quel fratto verrà dinotato da 0,0574.

§. 99. *Cor. IV.* E poichè ogni fratto non cangia di valore se multiplicansi per uno stesso numero il numeratore e 'l denominatore di esso (§. 58), dev' essere il fratto decimale $\frac{30574}{10000}$ uguale a ciascuno dei seguenti fratti

$$\frac{305740}{100000}, \frac{3057400}{1000000}, \frac{30574000}{10000000}, \text{ec.},$$

il primo dei quali si ottiene multiplicando il numeratore e 'l denominatore del fratto $\frac{30574}{10000}$ per 10, il secondo per 100, il terzo per 1000, ec. Ma il fratto decimale $\frac{305740}{100000}$ è lo stesso che 3,05740, il secondo (§. 98.) $\frac{3057400}{1000000}$ è lo stesso di 3,057400, ec. Dunque *un numero decimale non cangia di valore se a destra di esso si ponga uno, o più zeri.*

PROP. XXI. PROBL.

§. 100. *Dati più fratti decimali omogenei, sommarli insieme.*

Sol. Se i fratti proposti non contengano lo stesso numero di cifre decimali, essi vi si potranno ridurre (§. 99) ponendo gli zeri a destra di alcuna di quelle cifre decimali: ed in tal modo quei fratti si saranno ridotti allo stesso denominatore. Il perchè la somma degli stessi fratti dee pareggiare un altro fratto, che

ha per numeratore la somma dei numeratori dei fratti ridotti, e per denominatore il denominatore comune di questi (§. 75.).

Esempio. Sieno dati i fratti decimali omogenei 5,07, 8,9257432081, 0,0085720460, 15,73427, 278,5423, fa duopo prenderne la loro somma.

E poichè il secondo dei fratti proposti contiene più cifre decimali di ciascuno degli altri, si riducano questi allo stesso numero di cifre decimali del secondo fratto mercè gli zeri, che a destra di essi si pongono (§ 99). Quindi i fratti decimali dati si esibiscano nel modo seguente 5,0700000000, 8,9257432081, 0,0085720460, 15,7342700000, 278,5423000000, che devono avere gli stessi valori di quelli respettivamente, e 10000000000 per comune denominatore. Dunque la somma dei fratti decimali dati dee pareggiare quel fratto decimale, che ha per numeratore la somma 3082808853541, e per denominatore 10000000000. Vale a dire, che la somma dei fratti decimali dati è uguale a 308,2808853541.

5,0700000000
8,9257432081
0,0085720460
15,7342700000
278,5423000000
308,2808853541

§. 101. *Cor.* E poichè nella somma dei fratti decimali proposti nell'esempio precedente le parti decime corrispondono sulle decime, le centesime sulle centesime, e così appresso: laddove trascurando quei zeri posti a destra di taluni di essi non viene ad alterarsi la detta somma; l'è chiaro, che *per sommare più fratti decimali, convien disporli in modo che le decime corrispondano sulle decime, le centesime sulle centesime, e così in appresso: dipoi si dee prendere la somma come se le cifre mancanti in alcuni di essi fossero altrettanti zeri.*

PROP. XXII. PROBL.

§. 102. *Dati due fratti decimali omogenei, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Se i fratti proposti non contengano lo stesso numero di cifre decimali, vi si riducano mercè gli zeri, che si pongano a destra di uno di essi (§. 99.) : ed in tal modo quei fratti si saranno ridotti allo stesso denominatore. Il perchè (§. 78.) la differenza di essi dee pareggiare un altro fratto decimale, che ha per numeratore la differenza dei numeratori dei fratti ridotti, e per denominatore il comune denominatore degli stessi.

Esempio I. Sieno dati i due fratti decimali 7,523 e 0,834527, fa duopo sottrarre il minore di essi 0,834527 dal maggiore 7,523.

E poichè il secondo dei fratti dati contiene sei cifre decimali, e 'l primo ne ha tre, se pongansi tre zeri a destra della terza cifra decimale del primo dei fratti dati, esso non cangerà di valore, e 'l fratto decimale 7,523000, che ne risulta, dovrà avere lo stesso denominatore 1000000 del secondo. Il perchè la differenza dei fratti decimali proposti dee pareggiare quel fratto decimale, che ha per numeratore la differenza 6688473 dei numeratori di essi, ed 1000000 per denominatore. Dunque quella differenza dev' essere uguale a 6,688473, come quaggiù vedesi espresso

Diminuendo	7,523000
Sottrattore	0,834527
Residuo	6,688473

Esempio II. Sottrarre da 5,0085429 il fratto decimale 0,5274.

I fratti dati si dispongano in modo che le decime corrispondano sulle decime, le centesime sulle centesime, e così in appresso, e le cifre decimali mancanti nel secondo di quei fratti si suppliscano con gli zeri. Dipoi si esegua la sottrazione come se quei numeri fossero intieri, e dal residuo si separino con una virgola dalla

destra verso la sinistra tante cifre decimali, quante sono le cifre decimali di ciascuno dei fratti ridotti: e se nel residuo vi fosse minor numero di cifre decimali di quelle del diminuendo e del sottrattore le rimanenti si dovrebbero supplire con gli zeri verso la sinistra (§. 97.).

PROP. XXIII. PROBL.

§. 103. *Dati due fratti decimali, multiplicare l'uno di essi per l'altro.*

Sol. Si multiplichino tra loro i numeratori dei fratti proposti, e se il prodotto contenga un numero di cifre maggiore di quello delle cifre decimali, che si contengono in ambedue i fattori, si dovranno separare da esso con una virgola, e dalla destra verso la sinistra, tante cifre quante sono le cifre decimali in ambedue quei fattori. E se il prodotto contenga lo stesso numero di cifre quante sono le cifre decimali nei due fattori, sarà mestieri porre un zero avanti di esso, e scrivere una virgola tra lo zero e la prima cifra dello stesso prodotto. Che se poi il prodotto dei numeratori dei fratti proposti contenga un numero di cifre minore di quello delle cifre decimali, che vi sieno nei due fattori, bisognerà scrivere avanti di esso tanti zeri, che insieme colle cifre dello stesso prodotto facciano tante cifre, quante sono le cifre decimali di ambedue i fattori. Dipoi si dovrà scrivere una virgola avanti al primo zero verso la sinistra, e prima di questa virgola si dovrà scrivere un altro zero. Il fratto decimale, che con tale operazione si ottiene, sarà il prodotto dei fratti decimali dati.

Esempio I. Sieno dati i due fratti decimali 25,758 e 0,93, fa duopo multiplicare il primo di essi pel secondo.

Si multiplichino tra loro i numeratori 25758 e 93 dei fratti proposti, e dal prodotto 2395494 si separino con una virgola dalla destra verso la sinistra cinque cifre, quante sono le cifre decimali dei fattori. Il prodotto dei fratti decimali dati sarà 23,95494.

Esempio II. Sieno dati i due fratti decimali 0,974 e 0,58, bisogna multiplicare l'uno di essi per l'altro.

Si multiplichino tra loro i numeratori 974 e 58 dei fratti proposti, ed avanti al prodotto 56492, che contiene tante cifre, quante sono le cifre decimali dei fattori, si scriva un 0, e tra questo e la prima cifra 5 del prodotto si ponga una virgola. Il prodotto dei fratti decimali dati 0,974 e 0,58 sarà il fratto decimale 0,56492, come quaggiù vedesi espresso.

$$\begin{array}{r} 0,974 \\ 0,58 \\ \hline 7792 \\ 4870 \\ \hline 0,56492 \end{array}$$

Esempio III. Sieno dati i due fratti decimali 23,645 e 0,000086, fa duopo trovarne il loro prodotto.

Si multiplichino tra loro i numeratori 23645 ed 86 dei fratti dati, dei quali il primo contiene tre cifre decimali, e 'l secondo ne ha sei. Ma il prodotto 2033470 di quei numeratori contiene solo sette cifre. Dunque essendo nove le cifre decimali, che si contengono nei due fratti dati, converrà scrivere tre zeri avanti al detto prodotto, e tra 'l primo e 'l secondo zero si dovrà scrivere pure una virgola, affinchè le cifre dopo la virgola sieno nove, quante sono quelle, che si contengono in ambedue i fattori. Il perchè il prodotto cercato dev'essere 0,002033470, ovvero 0,00203347 (§. 99.).

Dim. E poichè il fratto (Es. II.) decimale 0,974 è lo stesso dell' altro $\frac{974}{1000}$, e 'l decimale 0,58 è lo stesso che il fratto $\frac{58}{100}$, il prodotto dei due fratti decimali 0,974 e 0,58 dev'essere il prodotto di $\frac{974}{1000}$ per $\frac{58}{100}$. Ma il prodotto di due fratti pareggia un altro fratto, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori dei

fratti dati, e per denominatore il prodotto dei denominatori dei medesimi. Dunque il prodotto di $\frac{974}{1000}$ per $\frac{58}{100}$ dee pareggiare $\frac{974 \cdot 58}{100000}$. E quindi dal prodotto 56492 di 974 per 58 bisogna separare dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quanti sono gli zeri, che si contengono nel denominatore 100000. Ma il numero di questi zeri è uguale a quello delle cifre decimali dei due fattori 0,974 e 0,58. Dunque il prodotto, che si domanda dev'essere 0,56492. C. B. F.

PROP. XXIV. PROBL.

§. 104. *Dato un fratto semplice, ridurlo ad un fratto decimale di un dato denominatore.*

Sol. A destra del numeratore del fratto semplice proposto si scrivano tanti zeri, quanti se ne contengono nel denominatore dato, e 'l numero, che ne risulta, si divida pel denominatore del fratto semplice. Di poi dal quoto si separino con una virgola tante cifre decimali verso la destra, quanti sono gli zeri del denominatore dato: e se le cifre del quoto sieno minori di questi zeri, in luogo delle rimanenti cifre vi si suppliscano gli zeri a sinistra del quoto. Il fratto decimale, che ne risulta, sarà quello, che si domanda.

Esempio. Sia dato il fratto semplice $\frac{4}{7}$, fa d'uopo ridurlo ad un fratto decimale, che abbia 1000000 per denominatore:

Si scrivano a destra del numeratore 4 del fratto semplice dato sei zeri, quanti se ne contengono nel denominatore decimale 1000000. Dipoi il numero 4000000, che ne risulta, si divida pel denominatore 7 del fratto semplice proposto, e dal quoto 571428, che n'emerge, si separino dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, quanti sono gli zeri del denominatore dato 1000000, cioè sei. Il fratto decimale 0,571428 sarà quello, che si domanda.

Dim. Poichè il fratto $\frac{4}{7}$ è lo stesso (§. 58.) dell'altro $\frac{4000000}{7000000}$, se dividasi per 7 tanto il numeratore che il denominatore di questo ultimo, dalla prima divisione si otterrà 571428 per quoto e 4 per residuo, e dalla seconda divisione si avrà 1000000 per quoto senza residuo. Il perchè dovrà essere (§. 75.)

$$\frac{4000000}{7000000}=\frac{7 \cdot 571428+4}{7 \cdot 1000000},$$

ovvero

$$\frac{4}{7}=\frac{7 \cdot 571428}{7 \cdot 1000000}+\frac{4}{7 \cdot 1000000}.$$

Ma il fratto (§. 59.) $\frac{7 \cdot 571428}{7 \cdot 1000000}$ è dello stesso valore dell' altro $\frac{571428}{1000000}$, ovvero di 0,571428, ed è poi il fratto $\frac{4}{7 \cdot 1000000}$ minore di 0,000001, e perciò nel caso proposto può trascurarsi. Dunque il fratto semplice $\frac{4}{7}$ ridotto ad un fratto decimale del denominatore 1000000 è ad un dipresso uguale a 0,571428. C. B. F.

§. 105. *Cor. I.* Se vogliasi un fratto decimale, che più dell' altro 0,571428 si approssimi al valore di $\frac{4}{7}$, converrà scrivere più di sei zeri a destra del numeratore di esso. Ma poichè nella divisione di 4000000 per 7 si ottiene 8 per ultima cifra del quoto, e 4 per residuo, ponendo un altro zero a destra del numero 4000000, il residuo 4 col zero a destra dee formare il numero 40, che è quello stesso dal quale si è incominciata la divisione. Onde il quoto di questo numero per 7 dovrà essere la prima cifra 5 del quoto 571428 ottenuto dalle precedenti divisioni, e 'l residuo dovrà essere pure quello, che si è ottenuto dalla prima divisione di 40 per 7. Dunque aggiungendo altri zeri a destra del numero 4000000 si dovranno ottenere collo stesso ordine

le cifre ottenute nelle prime sei divisioni, cioè le cifre 5,7,1,4,2,8,5,7, ec. Vale a dire, che il fratto semplice $\frac{4}{7}$ ridotto a decimale dee pareggiare la frazione 0,571428571428571428 . . . ., nella quale dopo ogni sei cifre ritorna lo stesso periodo di cifre. E per tal ragione la detta frazione dicesi *frazione periodica*.

§. 106. *Cor. II.* Dunque se nelle divisioni successive, che bisogna fare per ridurre un fratto semplice a fratto decimale, s'incontri un residuo, che sia lo stesso di quello ottenuto nella prima divisione, senza eseguire le altre divisioni si potrà scrivere a destra del quoto ottenuto lo stesso quoto ripetuto una o più volte.

PROP. XXV. PROBL.

§. 107. *Dati due fratti decimali, dividere l' uno di essi per l' altro.*

Sol. I fratti proposti si riducano (§. 99.) allo stesso denominatore ponendovi gli zeri a destra di uno di essi, e dai fratti, che ne risultano, si cancellino le virgole ed i zeri, che talvolta sono alla sinistra di essi. Onde dovranno emergerne due numeri intieri, dei quali uno risulta dal dividendo e l' altro dal divisore. Dipoi si riduca a fratto decimale (§. 104.) il fratto semplice, che ha per numeratore il primo di questi numeri, e per denominatore il secondo. Il fratto decimale, che si ottiene, sarà il quoto che si domanda.

Esempio. Si voglia dividere il fratto decimale 0,058423 per 0,823. I fratti decimali proposti ridotti allo stesso denominatore sono i seguenti 0,058423 e 0,823000. Onde togliendo gli zeri, e le virgole, che si trovano alla sinistra di questi fratti ridotti, si ottengono i due numeri 58423 e 823000, dei quali il primo risulta dal dividendo e 'l secondo dal divisore. Intanto il fratto semplice $\frac{58423}{823000}$, che ha per numeratore il primo di quei numeri e per denominatore il secondo, si riduca al fratto

decimale 0,0709878. Sarà questo il quoto, che si ottiene dividendo 0,058423 per 0,823.

Dividendo	*Divisore*
58423000000	823000
5761000	*Quoto*
8130000	709878
7407000	
7230000	
6584000	
6460000	
5761000	
6990000	
6584000	
Residuo 406000	

Dim. Poichè i fratti decimali 0,058423 ed 0,823 sono gli stessi degli altri $\frac{58423}{1000000}$ ed $\frac{823000}{1000000}$, il quoto di 0,058423 per 0,823 dev' essere lo stesso di quello, che si ottiene dividendo il fratto $\frac{58423}{1000000}$ per l' altro $\frac{823000}{1000000}$. Ma (§. 86.) dividendo il primo di questi ultimi fratti pel secondo si ottiene per quoto l' altro fratto $\frac{58423 \cdot 1000000}{823000 \cdot 1000000}$, che è lo stesso di $\frac{58423}{823000}$, il quale ridotto a fratto decimale (§. 104.) pareggia 0,0709878. Dunque il fratto decimale 0,0709878 dev'essere il quoto addimandato. C. B. F.

CAP. V.

DEL CALCOLO DEI NUMERI DENOMINATI.

§. 108. *Def. XXII.* I *numeri denominati* sono quelli ciascuno dei quali ne dinota una grandezza con numeri intieri separati tra loro, e le cui unità differiscono in valore.

§. 109. *Scol.* Affinchè si possa bene intendere la definizione dei numeri denominati, fa mestieri ricordarsi, che qualora negli usi della società per valutare certe grandezze si stabilisca una qualche unità, a cui quelle grandezze si devono rapportare, convien pure stabilire alcune unità minori delle precedenti per valutare le grandezze, che contengono una o più volte l'unità maggiore con una o più volte l'unità minore. Così tra noi si stabilisce la *canna* per unità di lunghezza, ed essa dividesi in otto parti uguali, che si dicono *palmi*: il palmo poi vien diviso in dodici parti uguali, che si dicono *once*, e l'oncia dividesi in cinque parti uguali, che si dicono *minuti*. Adunque per calcolare i numeri denominati si devono conoscere i rapporti, che le parti di essi hanno sì tra loro, che coll' unità principale: e per tal ragione vò quaggiù rapportare una tavola dei numeri denominati, che sono di un uso più frequente nella società.

TAVOLA

DI ALCUNE DIFFERENTI SPECIE DI UNITA', E DEI CARATTERI, ONDE ESSE NE VENGONO DINOTATE.

PER LE MONETE.

Duc. dinota . . . . Ducato	1 Ducato vale . . 10 carlini
Car. . . . . Carlino	1 Carlino vale . . 10 grana
Gr. . . . . Grano	1 Grano vale . . 12 cavalli
Cav. . . . . Cavallo	
L. . . . . Lira	1 Lira vale . . . 20 soldi
S. . . . . Soldo	1 Soldo vale . . . 12 denari
D. . . . . Denaro	
ec.	ec.

PER I PESI.

l. dinota . . . . libbra	1 libbra vale . . 12 oncie
on. . . . . oncia	1 oncia vale . . 16 dramme
dr. . . . . dramma	1 dramma vale . . 3 trappesi
tr. . . . . trappeso	1 trappeso vale . . 20 acini
ac. . . . . acino	
ec.	ec.

PER LE MISURE LINEARI.

càn. dinota . . . . canna	1 canna vale . . 8 palmi
pal. . . . . palmo	1 palmo vale . . 12 once
on. . . . . oncia	1 oncia vale . . 5 minuti
min. . . . . minuto	
T. dinota . . . . . . Tesa	1 Tesa vale . . . 6 piedi
P. . . . . Piede	1 piede vale . . . 12 pollici
p. . . . . pollice	1 pollice vale . . . 12 linee
l. . . . . linea	
ec.	ec.

PROP. XXVI. PROBL.

§. 110. *Dati più numeri denominati omogenei, prenderne la loro somma.*

Sol. I numeri proposti si scrivano gli uni sopra degli altri, tal che le parti della stessa specie si trovino in una medesima colonna verticale, e sotto di essi si distenda una linea. Dipoi si cominci la somma dalle parti della specie più piccola. Se la somma di queste parti non formi una o più unità della specie immediatamente superiore, la stessa si scriva sotto le unità della sua specie. Ma se quella somma costituisca una o più unità della specie immediatamente superiore, si scriva l' eccesso di detta somma sulle unità di questa seconda specie, e si ritengano le unità della stessa seconda specie per aggiungerle alle loro simili : così si dovrà procedere in appresso.

Esempio. Si vogliano sommare i numeri denominati omogenei $254^{l.}\ 7^{on.}\ 2^{dr.}\ 1^{tr.}\ 13^{ac.}$, $327^{l.}\ 5^{on.}\ 7^{dr.}\ 2^{tr.}\ 8^{ac.}$, $198^{l.}\ 6^{on.}\ 9^{dr.}\ 0^{tr.}\ 17^{ac.}$, $278^{l.}\ 9^{on.}\ 4^{dr.}\ 2^{tr.}\ 15^{ac.}$.

I numeri proposti si scrivano, come quaggiù si vede, in modo che gli acini corrispondano sopra gli acini, i trappesi sopra i trappesi, e così in appresso, e sotto quei numeri in tal guisa disposti si distenda una linea. Dipoi si prenda la somma 53 degli acini 13, 8, 17, e 15, che sono nei numeri dati. Onde contenendosi in 53 acini 2 trappesi e 13 acini, l'eccesso 13 si scriva sotto la linea nella direzione degli acini, ed i 2 trappesi si aggiungano alla somma 5 trappesi di $1^{tr.}$, $2^{tr.}$, $0^{tr.}$, e $2^{tr.}$, che si contengono nei numeri proposti. Ma i 7 trappesi, che risultano da quell'addizione contengono due dramme ed 1 trappeso. Dunque si scriva $1^{tr.}$ nella linea dei trappesi, e le 2 dramme si aggiungano alla somma delle dramme. Nella stessa guisa dovrà procedersi in appresso.

$$
\begin{array}{lllll}
254^{l.} & 7^{on.} & 2^{dr.} & 1^{tr.} & 13^{ac.} \\
327^{l.} & 5^{on.} & 7^{dr.} & 2^{tr.} & 8^{ac.} \\
198^{l.} & 6^{on.} & 9^{dr.} & 0^{tr.} & 17^{ac.} \\
278^{l.} & 9^{on.} & 4^{dr.} & 2^{tr.} & 15^{ac.} \\
\hline
1059^{l.} & 5^{on.} & 4^{dr.} & 1^{tr.} & 13^{ac.}
\end{array}
$$

PROP. XXVII. PROBL.

§. 111. *Dati due numeri denominati omogenei, sottrarre il minore di essi dal maggiore.*

Sol. Si dispongano i numeri proposti l'uno sull'altro, come nella somma, e sotto di essi si distenda una linea. Dipoi si cominci la sottrazione dalle unità della specie più piccola, e se il numero delle più picciole unità del sottrattore non sia maggiore di quelle del diminuendo, si scriva il residuo sotto la linea. Ma se il primo numero sia maggiore del secondo, si prenda nel diminuendo una unità della specie immediatamente superiore, e si riduca ad unità della specie inferiore. Questo numero, che risulta, aggiunto al numero delle più piccole unità, che sono nel diminuendo darà una somma maggiore del numero delle più piccole unità del sottrattore. Onde la differenza tra questa somma e 'l numero delle più piccole unità del sottrattore si dovrà scrivere sotto la linea in direzione verticale colle unità dell' infima specie. Inoltre, se nel diminuendo una qualche unità della specie immediatamente superiore all' infima siasi ridotta ad unità più piccole, si diminuisca di 1 quella specie di unità, e si prosegua nello stesso modo la sottrazione.

Esempio. Si voglia sottrarre il numero denominato $523^{can.}\ 3^{pal.}\ 8^{on.}\ 2^{min.}$ dall' altro $2073^{can.}\ 3^{pal.}\ 5^{onc.}\ 1^{min.}$

Si dispongano i numeri dati in modo che i minuti corrispondano sopra i minuti, le once sulle once, e così in seguito, e sotto di essi si distenda una linea. Ora essendo i 2 minuti del sottrattore maggiori di 1 minuto del diminuendo, si riduca 1 oncia del diminuendo a 5 minuti, che sommati con 1 minuto danno 6 minuti, da cui sottraendone 2, si avrà per residuo 4 minuti. Quindi le 5 once del diminuendo sono ora ridotte a 4. Ma le once del sottrattore sono più di 4. Dunque se 1 palmo del diminuendo si riduca a 12 once, ed a queste vi si aggiungano le 4 once, che vi erano, nel

diminuendo ne dovranno risultare 16 once, ed i 2 palmi si saranno ridotti ad 1 solo. Onde dalle 16 once se ne potranno sottrarre le 8, e ne resteranno altre 8, e dovendosi pure sottrarre i 3 palmi del sottrattore dai 2 palmi, che vi sono restati nel diminuendo, bisognerà pure ridurre 1 canna ad 8 palmi, che aggiunti a quei 2 palmi fanno 10 palmi. Dunque sottraendo 3 palmi da 10 palmi si avranno 7 palmi, e nel diminuendo vi resteranno 2072 canne, da cui si devono sottrarre 523 canne, come quaggiù si vede.

Diminuendo	$2073^{\text{can.}}$	$3^{\text{pal.}}$	$5^{\text{onc.}}$	$1^{\text{min.}}$
Sottrattore	$523^{\text{can.}}$	$3^{\text{pal.}}$	$8^{\text{onc.}}$	$2^{\text{min.}}$
Residuo	$1549^{\text{can.}}$	$7^{\text{pal.}}$	$8^{\text{onc.}}$	$4^{\text{min.}}$

PROP. XXVIII. PROBL.

§. 112. *Multiplicare un numero denominato per un numero astratto.*

Sol. Si scriva il numero astratto sotto il numero denominato, e sotto di essi si distenda una linea. Dipoi si multiplichino separatamente le differenti unità del numero denominato pel numero astratto, ed i prodotti, che si ottengono da queste multiplicazioni, si scrivano sotto la detta linea. Inoltre, si sommino i prodotti parziali di quelle differenti specie di unità (§. 40.) pel numero astratto. Finalmente del prodotto in tal guisa ottenuto si dividano le unità più piccole pel numero di esse, che costituisce una unità maggiore: il quoto di tal divisione si aggiunga al prodotto delle unità di questa seconda specie pel numero astratto, e 'l residuo si scriva sotto le unità dell'infima specie. Dipoi la somma del detto quoto e del prodotto delle unità della seconda specie si divida pel numero delle unità di questa seconda specie, che costituisce una unità della terza spe-

cie. Nello stesso modo si prosegua l'operazione in appresso.

Esempio. Si voglia multiplicare il numero denominato $37^{T.}$ $3^{P.}$ $7^{P.}$ $3^{l.}$ pel numero astratto 58.

Si scriva il primo dei numeri dati sul secondo, e sotto di essi si distenda una linea. Dipoi si multiplichino per 58 prima le $3^{l.}$, indi i $7^{p.}$, in seguito i $3^{p.}$, e finalmente le $37^{T.}$, ed i prodotti parziali si scrivano sotto la detta linea. Inoltre, si distenda una linea sotto i prodotti parziali, e se ne prenda la loro somma, che sarà $2146^{T.}$ $174^{P.}$ $406^{p.}$ $174^{l.}$. Ma il 12 in 174 vi si contiene 14 volte col resto di 6. Dunque $174^{l.}$ contengono $14^{p.}$ e $6^{l.}$. Si aggiungano intanto i $14^{p.}$ a $406^{p.}$, che si sono ottenuti dalla multiplicazione di $7^{p.}$ per 58; si avrà per somma $420^{p.}$, che conterranno tanti piedi, quante sono le unità del quoto di 420 per 12. Ma il 12 in 420 si contiene 35 volte risultandone *o* per residuo. Dunque si ponga $o^{P.}$ sotto l'ultima linea ed in direzione coi pollici del numero denominato dato, ed al prodotto 174 dei piedi, che si contengono nello stesso numero denominato pel numero astratto 58 vi si aggiungano $35^{P.}$, e si prosegua l'operazione nello stesso modo, come quaggiù vedesi espressa.

$37^{T.}$	$3^{P.}$	$7^{P.}$	$3^{l.}$
			58
296	24	56	24
185	15	35	15
$2146^{T.}$	$174^{P.}$	$406^{P.}$	$174^{l.}$

3.° Qu.	34	*2.° Qu.*	35	*1.° Qu.*	14
Som.	2180	*Som.*	209	*Som.*	420

Pr. tot. $= 2180^{T.}$ $5^{P.}$ $0^{P.}$ $6^{l.}$

1.ª Divisione.		*2.ª Divisione.*		*3.ª Divisione.*	
Dividendo	*Divisore*	*Dividendo*	*Divisore*	*Dividendo*	*Divisore*
174	12	420	12	209	6
12	*Quoto*	36	*Quoto*	18	*Quoto*
54	14	60	35	29	34
48		60		24	
Res.... 6		*Res....* 0		*Res....* 5	

PROP. XXIX. PROBL.

§. 113. *Dividere un numero denominato per un numero astratto.*

Sol. Si divida pel numero astratto dato quel numero, che nel dividendo contiene le unità della specie più grande, e 'l residuo della divisione si riduca ad unità della specie prossimamente inferiore alla precedente. Dipoi le unità di questa seconda specie, che si ottengono dal residuo di tal divisione, si aggiungano alle unità di questa medesima specie, che sono nel dividendo, e la somma si divida pel numero astratto dato. Nello stesso modo si prosegua l'operazione in appresso. I quoti della prima, seconda, ec. divisione dovranno rispettivamente dinotare le unità della specie più grande del quoto, quelle della seconda specie, e così in seguito.

Esempio. Si voglia dividere il numero denominato

$278^{L.}$ $3^{S.}$ $8^{D.}$ per 25.

Si dividano $278^{L.}$ per 25. Si avrà $11^{L.}$ per quoto e $3^{L.}$ per residuo. Ma le $3^{L.}$ di residuo equivalgono a $60^{S.}$, che aggiunti a $3^{S.}$, che sono nel numero denominato dato danno per somma $63^{S.}$. Dunque dividendosi $63^{S.}$ per 25, il quoto 2 dovrà dinotare il numero dei soldi, che si conterranno nell' intiero quoto del numero denominato dato pel numero astratto 25, e 'l residuo $13^{S.}$ dovrà multiplicarsi per 12, affin di ridurlo a denari. Ma il prodotto di 13 per 12 adegua 156. Dunque nel residuo poc' anzi ottenuto vi si contengono $156^{D.}$. Onde se al numero $156^{D.}$ vi si aggiungano gli $8^{D.}$ che sono nel numero denominato dato, e la somma $164^{D.}$ si divida pel numero astratto 25, il quoto 6 di tal divisione dovrà dinotarne i denari che si conterranno nel quoziente domandato, cui dovrà aggiungersi pure il fratto $\frac{14}{25}$ di denaro. Ed ecco quaggiù per disteso il calcolo dell' indicata operazione.

	Dividendo			*Divisore*
	$278^{L.}$	$3^{S.}$	$8^{D.}$	25
	25	60	156	*Quoto della 1.ª Divisione* $= 11^{L.}$
	28	63	164	*Quoto della 2.ª Divisione* $= 2^{S.}$
	25	50	156	
Res.	3	13	14	*Quoto della 3.ª Divisione* $= 6^{D.}$
				Residuo della 3.ª Divisione $= 14^{D.}$

Dunque l'intiero quoto dovrà essere $11^{L.}\ 2^{S.}\ 6^{D.}\ \frac{14^{D.}}{25}$

CAP. VI.

DEL MODO DI FORMARE IL QUADRATO E IL CUBO DI QUALUNQUE NUMERO.

§. 114. *Def. XXIII.* Ogni numero multiplicato per se stesso dà un prodotto, che dicesi *quadrato* o *seconda potenza* di esso numero, il quale chiamasi *radice quadrata* o *radice seconda* di quel prodotto.

§. 115. *Cor. I.* E poichè 100 è il quadrato di 10, 10000 quello di 100, 1000000 quello di 1000, e così in appresso; l'è chiaro, che i quadrati dei numeri semplici debbono trovarsi tra 1 e 99, ovvero essi debbono contenere, una o due cifre, quelli dei numeri formati da due cifre debbono trovarsi tra 100 e 9999, cioè debbono contenere tre, o quattro cifre, quelli dei numeri formati da tre cifre ne debbono contenere cinque, o sei, e così in appresso. Vale a dire, che *il quadrato di un qualunque numero dee contenere il doppio numero di cifre, che si contengono in esso, ovvero il doppio numero di tali cifre diminuito di uno.*

§. 116. *Cor. II.* I quadrati dei numeri semplici
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
sono 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,
che bisogna aver presenti nelle operazioni, che in appresso saranno indicate.

§. 117. *Scol. I.* Affinchè ciascuno si possa formare un'adeguata idea delle unità del quadrato di un numero, distendasi (*fig. 1*) la retta AB di quella lunghezza, che ne piaccia, ed essa si prolunghi insino al punto G, tal che la AG p. es. contenga la AB sei volte: e sieno AB, BC, CD, DE, EF, FG le sei parti uguali della retta AG. Dipoi sulla retta AG si formi il quadrato AH, ed il lato AI di questo si divida nei punti K, L, M, N, O in sei parti, ciascuna uguale ad AB. Inoltre, pei punti B, C, D, E, F si distendano altrettante linee rette parallele ad AI, ovvero a GH, e pei punti K, L, M, N, O si distendano pure altrettante linee rette parallele ad AG, ov-

vero ad IH. Or poichè le figure, che risultano dalle intersezioni di quelle rette parallele ad AI ed AG, hanno i lati opposti paralleli, esse devono essere altrettanti parallelogrammi. Ma i parallelogrammi KB, BP, PD, DQ, QF, FR hanno retti gli angoli, che sono nei punti A, B, C, D, E, F. Dunque tali parallelogrammi debbono essere rettangoli. Il perchè essendo la retta AK uguale all' altra AB, il rettangolo AB dev' essere un quadrato. Ma la retta KA è uguale non solo a ciascuna delle PC, QE, RG, che a ciascuna delle altre BC, CD, DE, EF, FG. Dunque anche i rettangoli BP, PD, DQ, QF, FR debbono essere altrettanti quadrati, i quali essendo formati sopra le rette BC, CD, ec. uguali tra loro, non che alla retta AB, debbono essere anche tra se uguali, e ciascuno uguale al quadrato KB. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che le figure parallelogramme contenute nei rettangoli LR, MX, NY, OZ, ed OH debbano essere altrettanti quadrati ciascuno uguale al quadrato KB, che è formato sulla retta AB. Ma poichè i quadrati uguali a KB, che sono formati sulla retta AG sono tanti di numero, quante sono le parti della AG uguali ad AB, l' è chiaro, che nell' intiero quadrato AH vi si debbano contenere tanti quadrati uguali a KB, quant' è il numero dei quadrati contenuti nel rettangolo AR preso tante volte, quante sono le parti della AI uguali ad AB, cioè quanti se ne contengono nel prodotto di 6 per 6. Onde essendo 36 il prodotto di 6 per 6, nel quadrato AH vi si dovran contenere 36 quadrati, ciascuno uguale a quello di AB. Dunque *se le unità di un numero ne dinotino linee rette uguali, le unità del quadrato di esso numero dovranno dinotarne quadrati, di cui ciascuno è formato sopra una di tali rette.*

§. 118. *Scol. II.* Inoltre, se la retta AG sia divisa in sei parti, ciascuna uguale ad AB, e sulla stessa retta si formi il rettangolo AZ, che abbia l' altro lato AN quadruplo di AB, e si faccia la costruzione indicata nel §. prec., si potrà in facil modo rilevare, che

nel rettangolo AZ vi si debbono contenere tanti quadrati uguali a KB, quante sono le unità del prodotto di 6 per 4. Vale a dire, che *qualora le unità di due numeri ne dinotano linee rette uguali, le unità del prodotto di essi dovranno dinotarne quadrati; di cui ciascuno è formato sopra una di tali rette.*

§. 119. *Def. XXIV.* Un numero moltiplicato pel suo quadrato dà un prodotto, che dicesi *cubo* o *terza potenza* di esso numero, il quale chiamasi *radice cubica* o *radice terza* rispetto a quel prodotto.

§. 120. *Cor. I.* Essendo 1000 il cubo di 10, 1000000 quello di 100, 1000000000 quello di 1000, ec., i cubi dei numeri minori di 10 devono trovarsi tra 1 e 999, quelli dei numeri, che sono da 10 fino a 99 devono trovarsi tra 1000 e 999999, ec. Ma i numeri, che sono tra 1 e 999 contengono una, due, o tre cifre, i numeri, che sono tra 1000 e 999999 contengono quattro, cinque, o sei cifre, ec. Dunque *il cubo di un qualunque numero contiene il triplo numero delle cifre, che si contengono in esso, ovvero il triplo numero delle stesse cifre diminuito di uno, o di due.*

§. 121. *Cor. II.* I cubi dei numeri semplici

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

sono 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

di cui bisogna ricordarsi nelle operazioni, che in seguito saranno indicate.

§. 122. *Scol. I.* I Geometri chiamano *cubo* quella figura solida terminata da sei quadrati uguali. Tale è (*fig.* 2.) il solido ABCDHEFG, che è terminato dai sei quadrati uguali AH, AC, AF, EB, EG, ED. Or se ciascuno dei tre lati AB, AD, AG di detta figura si divida p. es. in quattro parti tra se uguali, e pei punti I, K, L, delle divisioni del lato AB si concepiscano distese altrettante superficie piane parallele ai piani AH, BE, pei punti M, N, O si concepiscano distesi altrettanti piani paralleli agli altri AC, GE, e pei punti P, Q, R si concepiscano pure distesi altrettanti piani paralleli agli altri AF, DE, sarà chiaro che

le intersezioni dei detti piani coi piani terminanti il cubo debbano essere altrettante rette parallele ai lati dello stesso. Il perchè ciascun quadrato, da cui il cubo è terminato, dovrà (§. 117.) restarne diviso in sedici quadrati tra se uguali, e l'intiero cubo ABCDHEFG nè sarà diviso da quelle superficie piane in cubi anche tra se uguali, come è APSITXVM. E quindi sulla base ABCD del cubo ABCDHEFG vi devono poggiare colle loro basi tanti cubi uguali ad APSITXVM, quanti sono i quadrati uguali ad AISP, in che la stessa base vien divisa; cioè 16. Ma questo numero di cubi si contiene tante volte nel cubo ABCDHEFG, quante sono le parti della AG uguali ad AM, cioè quattro volte. Dunque devono essere 64 i cubi, uguali ad APSITXVM, quante sono le parti della AG uguali ad AM; cioè quattro volte. Dunque devono essere 64 i cubi uguali ad APSITXVM, che si contengono nel cubo ABCDHEFG. E quindi essendo 64 il prodotto di 4 pel suo quadrato 16, l'è chiaro, che *se le unità di un qualunque numero ne dinotino linee rette uguali, le unità del cubo di esso numero ne dovranno dinotare cubi, di cui ciascuno ha per lato una di quelle rette.*

§. 123. *Scol. II.* Inoltre, se il lato AL del rettangolo QL sia il triplo della retta AI, e l'altro lato AQ ne sia il doppio, sul rettangolo QL vi dovran poggiare le basi di sei cubi uguali ad APSITXVM. E quindi nel solido terminato dai tre rettangoli QL, LG, QG, e dagli altri opposti a questi vi si dovranno contenere tante volte sei cubi uguali al cubo APSITXVM, quante sono le parti della AG uguali ad AM cioè quattro. Vale a dire, che nel solido terminato dai tre rettangoli QL, LG, GQ, e dagli altri tre, che sono opposti a questi, vi si devono contenere 24 cubi ciascuno uguale ad APSITXVM. Ma il numero 24 risulta dalla multiplica di 2 per 3 e per 4. Dunque *se le unità di tre numeri ne dinotino linee rette uguali, quelle del prodotto di essi numeri dovranno dinotarne cubi, di cui ciascuno ha per lato una di quelle rette.*

PROP. XXX. TEOR.

§. 124. ***Se un numero qualunque si divida in due parti, il quadrato di esso dovrà pareggiare i quadrati delle parti insieme col doppio prodotto di ambedue le parti.***

Dim. Se il numero 57 p. es. si divida nelle due parti 25 e 32, il quadrato di esso dovrà pareggiare 57 preso 25 volte aggiunto a 57 preso 32 volte, ovvero a

$$57\times25+57\times32.$$

Ma il prodotto di 57 per 25, o di 25 per 57 (§.35) è lo stesso che 25 preso 25 volte aggiunto a 25 preso 32 volte, ed il prodotto di 57 per 32, o di 32 per 57 è pure uguale a 32 preso 25 volte insieme con 32 preso 32 volte. Dunque dev' essere

$$57\times25=25\times25+32\times25$$

e

$$57\times32=\quad 32\times25+32\times32.$$

E quindi ne risulta $57\times25+57\times32$, ovvero il quadrato di 57 uguale a

$$25\times25+2\times32\times25+32\times32.$$

Vale a dire, che se un numero ec. C. B. D.

§. 125. *Cor. I.* Se da un qualunque numero se ne tolga 1, il quadrato di esso numero sarà uguale al quadrato del residuo insieme col doppio prodotto di quel residuo multiplicato per 1, e col quadrato di 1. Ma il doppio del residuo multiplicato per 1 è il doppio dello stesso residuo, ed è 1 il quadrato di 1. Dunque il quadrato del detto numero dev' essere uguale al quadrato del residuo insieme col doppio dello stesso residuo aumentato di 1.

§. 126. *Cor. II.* E quindi il quadrato di un qualunque numero dev' essere minore di quello dello stesso numero aumentato di 1 per quanto è il doppio del numero proposto aggiuntovi 1.

§. 127. *Cor. III.* Il perchè la radice quadrata di un numero intiero non si può sempre ottenere esattamente, ma spesso si ottiene per approssimazione, come si vedrà nel seguente Cap.

PROP. XXXI. TEOR.

§. 128. *Se le diverse cifre di un numero composto si considerino come numeri semplici, il quadrato di esso numero si otterrà prendendo la somma del quadrato della prima cifra a sinistra, del doppio della prima cifra multiplicata per la seconda, del quadrato della seconda, del doppio del numero dinotato dalle due prime cifre multiplicato per la terza, del quadrato della terza, ec., tal che questi numeri sieno scritti in modo, che le unità del primo corrispondano sulle decine del secondo, le unità del secondo sulle decine del terzo, ec.*

Dim. Poichè il quadrato p. es. del numero 8749 adegua (§. 124.)

$$8740\times8740+2\times8740\times9+9\times9,$$

ed è $8740\times8740=8700\times8700+2\times8700\times40+40\times40$, dovrà essere

$$8749\times8749=8700\times8700+2\times8700\times40+40\times40$$
$$+2\times8740\times9+9\times9.$$

Ma il quadrato del numero 8700, o sia il prodotto di 8700 per 8700 è uguale ad (§. 124.)

$$8000\times8000+2\times8000\times700+700\times700.$$

Dunque dev' essere il quadrato di 8749, ovvero

$$8749\times8749=8000\times8000+2\times8000\times700+700\times700$$
$$+2\times8700\times40+40\times40+2\times8740\times9+9\times9.$$

Il perchè essendo

64000000 . . il quadrato di 8000,
11200000 . . il doppio prodotto di 8000 per 700,
490000 . . il quadrato di 700,
696000 . . il doppio prodotto di 8700 per 40,
1600 . . il quadrato di 40,
157320 . . il doppio prodotto di 8740 per 9,
81 . . il quadrato di 9,

sarà 76545001 . . il quadrato del numero 8749.

Ma la somma del quadrato di 8000, del doppio prodotto di 8000 per 700, del qnadrato di 700, ec. è la stessa dell' altra, che si otterrebbe cancellando da

tali quadrati e doppii prodotti tutti gli zeri, che risultano da quelli, che sono alla destra dei fattori 8000, 700, ec., scrivendo quei numeri collo stesso ordine quassù rapportato, ed in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, le unità di questo sulle diecine del terzo, ec. Dunque se le diverse cifre di un numero composto, ec. C. B. D.

Esempio I. Si voglia formare il quadrato del numero 50042.

Si prenda il quadrato . .	25	. . di 5,
il doppio prodotto	00	. . di 5 per 0,
il quadrato	00	. . di 0,
il doppio prodotto	00	. . di 50 per 0,
il quadrato	00	. . di 0,
il doppio prodotto	4000	. . di 500 per 4,
il quadrato	16	. . di 4,
il doppio prodotto	20016	. . di 5004 per 2,
e 'l quadrato	4	. . di 2;
la somma . .	2504201764	sarà il quadrato

di 50042.

Esempio II. Si voglia formare il quadrato del numero 3974.

Si prenda il quadrato . .	9	. . di 3,
il doppio prodotto . . .	54	. . di 3 per 9,
il quadrato	81	. . di 9,
il doppio prodotto . . .	546	. . di 39 per 7,
il quadrato	49	. . di 7,
il doppio prodotto . . .	3176	. . di 397 per 4,
e 'l quadrato	16	. . di 4;
la somma . .	15792676	sarà il quadrato di

3974.

§. 129. *Cor. I.* Essendo il prodotto di due fratti uguale ad un altro fratto, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori di quei primi, e per denominatore il prodotto dei loro denominatori. (§. 86.); l'è chiaro, che il quadrato di un fratto debba essere un altro fratto, il cui numeratore sia il quadrato del nu-

meratore del proposto, e 'l denominatore sia il quadrato del denominatore dello stesso.

§. 130. *Cor. II.* E se vogliasi il quadrato di un numero intiero unito ad un fratto, converrà ridurre l' intiero e 'l fratto ad un sol fratto (§. 60.), e poi del fratto, che ne risulta dovrà formarsene il quadrato (§. 129.).

§. 131. *Cor. III.* Inoltre, poichè il quadrato di un fratto decimale, o di un numero intiero unito ad un decimale dee contenere il doppio numero di cifre decimali, che sono nella radice (§. 103.); l'è chiaro, che quel quadrato può formarsi considerando il numero dato come se fosse intiero, e poi separando con una virgola dalla destra verso la sinistra dello stesso quadrato tante cifre decimali, che sieno in numero il doppio di quelle, che si contengono nella radice.

§. 132. *Cor. IV.* Finalmente per ottenere il quadrato di un numero denominato converrà ridurlo ad un numero intiero, le cui unità sieno quelle dell' infima specie del numero denominato dato, e dipoi dovrà formarsi il quadrato del numero intiero ottenuto.

Esempio. Si voglia determinare il quadrato del numero denominato $32^{can.}\ 3^{pal.}\ 5^{on.}\ 2^{min.}$

Essendo la canna di 8 palmi, in 32 canne vi si conterranno 32 volte 8 palmi, cioè 256 palmi, e $32^{can.}\ 3^{pal.}$ equivaleranno a 259 palmi. Ma in ogni palmo vi si contengono 12 once. Dunque in $259^{pal.}$ si dovran contenere $3108.^{on.}$ E quindi in $32^{can.}\ 3^{pal.}\ 5^{on.}$ si conterranno $3113.^{on.}$ Ma ogni oncia contiene 5 minuti. Dunque in $3113^{on.}$ si dovran contenere 15565 minuti, ed in $3113^{on.}\ 2^{min.}$, o sia in $32^{can.}\ 3^{pal.}\ 5^{on.}$

2$^{min.}$ si conterranno 15567,$^{min.}$, di cui il quadrato adegua 24233148 9$^{min.qu.}$. Or poichè la lunghezza di un oncia contiene 5 minuti, il quadrato di un oncia (§. 117.) dovrà contenere 25 quadrati, di cui ciascuno ha per lato la retta di un minuto; e quindi nel numero 242331489$^{min.qu.}$ si dovran contenere tante once quadrate per quante volte il 25 si contiene in esso. Ma il 25 in 242331489$^{min.qu.}$ si contiene 9693259 rimanendovi 14. Dunque il quadrato del proposto numero denominato dee pareggiare 9693259$^{on.qu.}$ 14$^{on.qu.}$. Inoltre, essendo la lunghezza di un palmo uguale a 12 once, e con ciò il quadrato di un palmo (§. 117.) uguale a 144 once quadrate. Nel quadrato del numero proposto si dovran contenere tanti palmi quadrati, quante sono le unità del quoto di 9693259$^{on.qu.}$ per 144. Ma un tal quoto adegua 67314 rimanendovi 43. Dunque il quadrato del proposto numero dee pareggiare 67314$^{pal.qu.}$ 43$^{on\ qu.}$ 14$^{min.qu.}$. Finalmente, poichè la canna dividesi in 8 palmi, il quadrato della canna conterrà 64 palmi quadrati, ed in 67314$^{pal.qu.}$ si dovran contenere tante canne quadrate, quante sono le unità del quoto di 67314 per 64. Ma il 64 in 67314 vi si contiene 1051 col residuo 50. Dunque il quadrato del numero 32$^{can.}$ 3$^{pal.}$ 5$^{on.}$ 2$^{min.}$ dee pareggiare 1051$^{can.qu.}$ 50$^{pal.qu.}$ 43$^{on.qu.}$ 14$^{mi.qu.}$.

PROP. XXXII. TEOR.

§. 133. *Se un numero qualunque si divida in due parti, il cubo di esso dovrà pareggiare la somma dei cubi delle parti insieme col triplo quadrato di una parte multiplicato per l'altra aggiunto al triplo quadrato di questa seconda parte multiplicato per la prima.*

Dim. Se p. es. il numero 57 si divida nelle due parti 25 e 32, il quadrato di esso sarà uguale a

$$25\times25+2\times25\times32+32\times32,$$

e 'l cubo dovrà pareggiare

$$25\times25\times57+2\times25\times32\times57+32\times32\times57.$$

Ma il prodotto di 25 per 25 multiplicato per 57 adegua il prodotto di 25 per 25 preso 25 volte e 32 volte, ovvero quel prodotto è uguale a

$$25\times25\times25+25\times25\times32:$$

il prodotto $2\times25\times32$ per 57 è pure uguale a

$$2\times25\times32\times32+2\times25\times32\times25;$$

ed è finalmente il prodotto $32\times32\times57$ uguale a

$$32\times32\times25+32\times32\times32.$$

Dunque dev' essere

$$25\times25\times57+2\times25\times32\times57+32\times32\times57,$$

ovvero il cubo di 57 uguale a

$$25\times25\times25+25\times25\times32$$
$$+2\times25\times25\times32+2\times25\times32\times32$$
$$+\ 32\times32\times25+32\times32\times32.$$

Ma i due prodotti $25\times25\times32$ e $2\times25\times25\times32$ insieme presi sono uguali a $3\times25\times25\times32$, e gli altri due $2\times25\times32\times32$ e $32\times32\times25$ insieme presi adeguano $3\times25\times32\times32$. Dunque dev' essere

$$57\times57\times57=25\times25\times25+3\times25\times25\times32+3\times25\times32\times32$$
$$+32\times32\times32.$$

Vale a dire, che se un numero qualunque, ec, C. B. D.

§. 134. *Cor. I.* Se da un numero se ne tolga 1, il cubo di esso numero sarà uguale al cubo del residuo insieme col triplo quadrato del residuo multiplicato per 1 aggiuntovi il triplo quadrato di 1 multiplicato per

quel residuo ed il quadrato di 1; ovvero il cubo del detto numero dovrà pareggiare il cubo del residuo aggiuntovi il triplo quadrato di questo, il triplo dello stesso, ed 1.

§. 135. *Cor. II.* E quindi il cubo di un numero dee differire da quello dello stesso numero aumentato di 1 per quanto è il triplo quadrato di esso aggiunto al triplo dello stesso numero aumentato di 1.

§. 136. *Cor. III.* Il perchè la radice cubica di un qualunque numero non si può sempre ottenere esattamente, ma spesso si ottiene per approssimazione, come si vedrà nel seguente Cap.

PROP. XXXIII. TEOR.

§. 137. *Se le diverse cifre di un numero composto si considerino come numeri semplici, il cubo di esso numero si otterrà prendendo la somma del cubo della prima cifra a sinistra, del triplo quadrato di essa prima cifra multiplicato per la seconda, del triplo quadrato della seconda multiplicato per la prima, del cubo della seconda, del triplo quadrato del numero dinotato dalle due prime cifre multiplicato per la terza, del triplo quadrato della terza cifra multiplicato pel numero dinotato dalle due prime cifre, del cubo della terza cifra, ec., tal che questi numeri sieno scritti in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, le unità del secondo sulle diecine del terzo, ec.*

Dim. Il numero 874 p. es. si divida nelle due parti 870 e 4; sarà il cubo di esso numero uguale (§. 133.) ad

$870\times870\times870+3\times870\times870\times4+3\times870\times4\times4+4\times4\times4.$

Ma $870\times870\times870$ adegua (§. 133.)

$800\times800\times800+3\times800\times800\times70+3\times800\times70\times70+70\times70\times70.$

Dunque dev' essere

$874\times874\times874=800\times800\times800+3\times800\times800\times70$
$+3\times800\times70\times70+70\times70\times70+3\times870\times870\times4$
$+3\times870\times4\times4+4\times4\times4.$

Il perchè essendo

512000000 . . il cubo di 800,
134400000 . . il triplo quadrato di 800 mult. per 70,
11760000 . . il triplo quadrato di 70 mult. per 100,
343000 . . il cubo di 70
9082800 . . il triplo quadrato di 870 mult. per 4,
41760 . . il triplo quadrato di 4 mult. per 870,
e 64 . . il cubo di 4,

la so. 667627624 dei detti numeri sarà il cubo del numero 874. Ma tal somma è la stessa di quella, che si otterrebbe cancellando da quei numeri tutti gli zeri, che sono alla destra dei fattori 800, 70, ed 870, e scrivendo quei numeri in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, le unità del secondo sulle diecine del terzo, ec. Dunque se le diverse cifre, ec. C. B. D.

Esempio I. Si voglia determinare il cubo di 297.

Si prenda il cubo . . 8 . . di 2,
il triplo quadrato . . 108 . . di 2 mult. per 3,
il triplo quadrato . . 486 . . di 9 mult. per 2,
il cubo . . . . 729 . . di 9,
il triplo quadrato . . 17661 . . di 29 mult. per 7,
il triplo quadrato . . 4263 . . di 7 mult. per 29,
e 'l cubo . . . . . . 343 . . di 7,

la somma . . 26198073 sarà il cubo di 297.

Esempio II. Si voglia il cubo del numero 5007.

Si prenda il cubo . . 125 . . di 5,
il triplo quadrato . . 000 . . di 5 mult. per o,
il triplo quadrato . . 000 . . di o mult. per 5,
il cubo . . . . 000 . . di o,
il triplo quadrato . . 000 . . di 50 mult. per o,
il triplo quadrato . . 000 . . di o mult. per 50,
il cubo . . . . 000 . . di o
il triplo quadrato . . 5250000 . . di 500 mult. per 7,
il triplo quadrato . . 73500 . . di 7 mult. per 500,
e 'l cubo . . . . . . 343 . . di 7.

la somma . . 125525735343 sarà il cubo addiman.

§. 138. *Cor. I.* Il cubo di un fratto pareggia un altro fratto, che ha per numeratore il cubo del numeratore del primo e per denominatore il cubo del denominatore di esso.

§. 139. *Cor. II.* Il cubo di un numero intiero unito ad un fratto si ottiene riducendo prima l'intiero e 'l fratto (§. 60.) ad un sol fratto, e poi formando il cubo del fratto spurio, che ne risulta (§. 137.).

§. 140. *Cor. III.* E poichè il quadrato di un fratto decimale o di un numero intiero unito ad un fratto decimale contiene il doppio numero di cifre decimali, che si contengono nella radice (§. 103.), e multiplicando questo quadrato per la radice si ottiene il cubo, questo dovrà contenere il triplo numero di cifre decimali, che sono nella radice: e per tal ragione se quel numero decimale si consideri come intiero e di esso se formi il cubo (§. 137.), da questo cubo si dovranno separare con una virgola dalla destra verso la sinistra tante cifre decimali, che sieno il triplo di quelle, che si contengono nella radice.

§. 141. *Cor. IV.* Il cubo di un numero denominato si ottiene riducendo esso numero alle unità dell'infima specie, e poi prendendo il cubo del numero, che ne risulta.

Esempio. Si voglia formare il cubo del numero denominato $32^{\text{can.}}\ 3^{\text{pal.}}\ 5^{\text{on.}}\ 2^{\text{min.}}$.

Il numero proposto (Veggasi l'Esem. del §. 132) ridotto a minuti adegua $15567^{\text{min.}}$, di cui il quadrato è

$242331489^{\text{min.qu.}}$, e'l cubo pareggia $3772374289263^{\text{min.c.}}$.

Ma il cubo di un oncia (§. 122.) contiene 125 minuti cubici. Dunque in 3772374289263 minuti cubici vi si debbono contenere tante once cubiche, quante sono le unità del quoto, che risulta dividendo 3772374289263 per 125; cioè $30178994314^{\text{on. c.}}$ e $13^{\text{min. c.}}$. E

quindi contendosi 1728 once cubiche in ciascun palmo cubico, in $30178994314^{\text{on. c.}}$ si debbono contenere $17464695^{\text{pal. c.}}$ e $1354^{\text{on. c.}}$. Ma in un palmo cubico si contengono 512 canne cubiche. Dunque in $17464695^{\text{pal.c.}}$ si debbono contenere $34110^{\text{can.c.}}$ e $375^{\text{pal.c.}}$. Il perchè dev'essere $34110^{\text{can.c.}}\,375^{\text{pal. c.}}\,1354^{\text{on.c.}}\,13^{\text{min.c.}}$ il cubo di $32^{\text{can.}}\,3^{\text{pal.}}\,5^{\text{on.}}\,2^{\text{min.}}$.

CAP. VII.

DELLE ESTRAZIONI DELLE RADICI QUADRATE E CUBICHE.

§. 142. *Def. XXV. L'estrarre una certa radice* da un numero consiste nel determinare un altro numero, che siane la detta radice del proposto.

§. 143. *Scol.* E poichè non tutti i numeri sono quadrati e cubi di altri numeri (§§. 127., e 136.), la radice quadrata o la cubica non si otterrà sempre esattamente. Ma qualora quel numero non è un quadrato o cubo perfetto, convien prendere quella radice, che corrisponda al quadrato o al cubo, che è il più grande tra quei quadrati o cubi, che sono tra 'l zero e 'l numero proposto: ed una tal radice chiamasi *radice prossimamente minore del numero proposto*. Così p. es. essendo 64 il più grande tra i quadrati dei numeri intieri, che sono tra 'l zero e 'l 72, ed 8 la radice quadrata di 64, sarà 8 la radice quadrata prossimamente minore di 72.

PROP. XXXIV. PROB.

§. 144. *Dato un numero, estrarne la radice quadrata.*

Sol. Sia dato il numero 2564201764, fa duopo estrarne la radice quadrata.

Il numero proposto, come quaggiù si vede, si divida mercè alcune virgole e dalla destra verso la sinistra in periodi, di cui ciascuno costi di due cifre, all' infuori dell' ultimo, o del primo a sinistra, che può contenerne una sola. Sarà chiaro, che il numero 25 dinotato dal primo periodo a sinistra non debba essere minore del quadrato della prima cifra della radice (§. 128.). Onde se dal numero 25 se n' estragga la radice quadrata esatta 5, o la prossimamente minore se il detto numero non sia un quadrato perfetto, dovrà essere 5 la prima cifra della radice. Intanto il quadrato 25 della radice 5 si sottragga dal primo periodo 25 del numero dato. Dipoi a destra del residuo si pongano le altre due cifre 04 del seguente periodo. Sarà chiaro, che il numero, che ne risulta debba contenere (§. 128.) la somma del doppio prodotto della prima cifra della radice per la seconda e del quadrato della seconda, scritto in modo che le unità di quel doppio prodotto corrispondano sulle diecine di questo: e se tolgasi la seconda cifra 4 del secondo periodo, il numero, che ne risulta, dovrà contenere il doppio prodotto della prima cifra della radice multiplicato per la seconda. Il perchè se questo numero si divida per 10 doppio di 5, e 'l quoto *o* si ponga non solo alla destra del 5 col quale fa 50, ma benanche alla destra del 10 col quale fa 100, questo numero 100 conterrà il doppio 10 della prima cifra della radice e la seconda cifra *o* della stessa radice. E quindi il doppio prodotto della prima cifra della radice per la seconda e 'l quadrato della seconda disposti in modo che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo e sommati insieme daranno lo stesso numero, che si ha

multiplicando *o* per 100, o sia *o*. Onde se dal primo residuo col secondo periodo 04 si tolga il prodotto *o* poc' anzi ottenuto, si avrà 4 per residuo.

Inoltre, al residuo 4 si pongano a destra le altre due cifre 20 del terzo periodo. Il numero 420, che ne risulta, dovrà contenere la somma del doppio prodotto del numero 50 dinotato dalle due prime cifre della radice per la terza e del quadrato della terza scritto in modo, che le diecine di esso corrispondano sotto le unità di quel doppio prodotto (§. 128.): e cancellando l'ultima cifra *o* del numero 420, ne risulterà 42, che dee contenere il doppio prodotto di 50 per la terza cifra della radice. Si prenda dunque 100 doppio di 50, e poi si divida 42 per 100. Il quoto *o* di tale divisione dovrà essere la terza cifra della radice. Il perchè se a destra del numero 100 si ponga *o*, e poi si multiplichi 1000 per *o*, il prodotto *o*, che si otterrà, sarà uguale al doppio prodotto di 500 per *o* ed al quadrato di *o* insieme presi. Onde se un tal prodotto si sottragga da 420, ed a destra del residuo 420 si pongano le altre due cifre 17 del quarto periodo, il numero 42017, che ne risulta, dovrà contenere il doppio prodotto di 500 per la quarta cifra della radice, e'l quadrato della stessa quarta cifra. E quindi cancellando l'ultima cifra 7 da 42017, ne risulterà 4201, che dovrà contenere il doppio prodotto di 500 per la quarta cifra della radice. Si prenda intanto il doppio 1000 di 500, e per esso dividasi il numero 4201. Dipoi il quoto 4 di tale divisione si scriva tanto alla destra del 500 col quale fa 5004, che alla destra di 1000 col quale fa 10004. Onde se multiplicasi 10004 per 4, il prodotto 40016 sarà la somma del doppio prodotto di 5000 per 4 quarta cifra della radice e del quadrato di 4 scritti però in modo, che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo. Il perchè se quel prodotto 40016 si sottragga da 42017, ed a destra del residuo si ponga il numero 64, che trovasi nell' ultimo periodo, il numero 200164, che ne risulta dovrà contenere la som-

ma del doppio prodotto di 5004 per la quinta cifra della radice, e del quadrato di questa quinta cifra scritto in modo che le diecine di esso corrispondano sotto le unità di quel doppio prodotto. E quindi cancellando l' ultima cifra 4 da 200164, il numero 20016, che ne risulta, dovrà contenere il doppio prodotto di 5004 per la quinta cifra della radice. E perciò se dividasi 20016 per 10008 doppio di 5004, e 'l quoto 2, che ne risulta si ponga tanto alla destra del numero 5004, che alla destra di 10008, col quale fa 100082, e poi si multiplichi 100082 per 2, il prodotto 200164, che ne risulta, dovrà pareggiare la somma del doppio prodotto di 5004 per 2, e del quadrato dell' ultima cifra 2 della radice scritto in modo che le diecine o di questo corrispondano sotto le unità di quello. Ma il prodotto di 100082 per 2 non differisce dal precedente residuo 200164. Dunque il numero proposto 2504201764 è un quadrato perfetto. C. B. F.

Numero dato	25,04,20,17,64	Rad. qua.	50042
Quadrato di 5	25		10004
	042017		100082
Pro. di 10004 per 4	40016		
	200164		
Pro. di 100082 per 2	200164		
Residuo	0		

Esempio I. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 15792676.

Il numero proposto si divida in periodi, come quassù si è indicato. Dipoi si estragga la radice quadrata prossimamente minore 3 del numero 15 dinotato dal primo periodo a sinistra del numero proposto, e 'l quadrato 9 di 3 si sottragga da 15, e si noti sotto una linea il residuo 6 di questa sottrazione. Inoltre, a destra del residuo 6 si pongano le due cifre del secondo periodo 79, e 'l numero 67 formato da quel residuo e dalla prima cifra del secondo periodo si divida pel doppio 6 della prima cifra 3 della radice. Il quoto 9 di questa

divisione si ponga non solo a destra del 3 col quale fa 39, ma benanche alla destra del 6 col quale fa 69. Intanto si multiplichi 69 per 9, e 'l prodotto 621 si sottragga dal numero 679, e 'l residuo 58 si scriva sotto una linea. A destra di questo residuo 58 vi si pongano le due cifre del terzo periodo 26; onde ne risulta il numero 5826. Dipoi si divida 582 pel doppio 78 del numero 39 dinotato dalle due prime cifre della radice, e 'l quoto 7 di tale divisione si ponga non solo alla destra di 78, ma benanche alla destra di 39. Inoltre, il numero 787 si multiplichi per 7, e 'l prodotto 5509, che si ottiene, si sottragga da 5826, ed a destra del residuo 317 si ponga il numero 76 dinotato dall' ultimo periodo del numero proposto. Finalmente, si prenda il doppio 794 di 397, e per esso dividasi il numero 3176. Il quoto 4, che si ottiene, sarà l' ultima cifra della radice. Difatti se quel quoto si ponga alla destra del numero 794 si avrà 7944, e multiplicando 7944 per 4 si otterrà per prodotto 31776, che non differisce dal numero, che si è ottenuto ponendo a destra del precedente residuo 317 l' ultimo periodo 76 del numero dato. Ed ecco quaggiù esibito il calcolo per la estrazione della radice quadrata del proposto numero.

Numero dato	15,79,26,76	Radice quadrata	3974
	9		69
	679		787
	621		7944
	5826		
	5509		
	31776		
	31776		
Residuo	0		

Esempio II. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 7390382.

Il numero proposto si divida in periodi, come si è indicato nel precedente Problema, e si estragga la

radice quadrata prossimamente minore 2 dal numero 7 dinotato dal primo periodo a sinistra. Dipoi il quadrato 4 di 2 si sottragga da 7, ed a destra del residuo 3 si ponga il numero 39 dinotato dal secondo periodo. Indi il numero 33 si divida pel doppio 4 della prima cifra della radice, ed il quoto 8 di tal divisione si ponga non solo alla destra della prima cifra 2 della radice, ma benanche alla destra di 4 doppio di 2. Ma poichè multiplicando 8 per 48 si ottiene per prodotto 384, che è maggiore di 339, converrà diminuire di 1 il quoto 8, che si è ottenuto dalla precedente divisione. Quindi in luogo di 8 si ponga 7 tanto alla destra di 2, che alla destra di 4; e poi si multiplichi 47 per 7, e'l prodotto 329 si sottragga da 339. A destra del residuo 10, che si ottiene, si ponga il numero 03 dinotato dal terzo periodo, e poi si divida 100 per 54 doppio del numero 27 dinotato dalle due prime cifre della radice; e si prosegua il resto dell'operazione come quaggiù si vede espresso.

Numero dato	7,39,03,82	Radice quadrata 2718
	4	47
	339	541
	329	5428
	1003	
	541	
	46282	
	43424	
Residuo	2858	

E di quì si scorge, che il numero dato non è un quadrato perfetto.

§. 145. *Cor. I.* E poichè la radice quadrata di un numero, che contiene intieri e decimali, o solo decimali, deve avere (§. 131.) un numero di cifre decimali metà di quelle, che sono nel quadrato, l'è chiaro, che per estrarre la radice quadrata da un numero, che contenga intieri e decimali, o solo deci-

mali, convien prima ridurre le cifre decimali, se noi sieno a numero pari, col porre a destra di esse un zero, e poi estrarre la radice quadrata dal numero, che ne risulta, considerando le cifre decimali come se fossero intieri: e finalmente dalla radice trovata converrà separarne tante cifre decimali, che sieno in numero metà di quelle, che si contengono nel quadrato, compresovi anche lo zero se sia stato posto a destra delle cifre decimali del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 172,08356, che contiene cinque cifre decimali.

Essendo il numero proposto lo stesso dell'altro 172,083560, l'è chiaro, che se da questo numero si tolga la virgola, che è in mezzo, e dall'altro 172083560, che ne risulta, si estragga la radice quadrata 13118, questa divisa per 1000 sarà la radice quadrata del numero 172083560 diviso pel quadrato di 1000 (§. 129.), ovvero di 172,083560. Dunque la radice quadrata di 172,08356 adegua 13,118.

§. 146. *Cor. II.* Essendo il numero 172,08356 lo stesso dell'altro, che risulta ponendo a destra di esso un qualsivoglia numero di zeri, la radice quadrata del numero 172,08356 dev' essere la stessa di quella, che si ha ponendo a destra dello stesso numero tanti zeri, che colle cifre decimali facciano un numero pari. Ma in tal caso le cifre decimali sono maggiori di numero. Dunque dalla radice, che si ottiene, converrà separare un maggior numero di cifre decimali: e questa radice sarà più esatta di quella, che si ha non ponendo i zeri a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 172,08356 coll'approssimazione fino alle centomillesime.

E poichè l'approssimazione della radice da trovarsi si dee spingere fino alle centomillesime, cioè fino alla quinta cifra decimale, nel quadrato vi dovranno (§. 131.) essere dieci cifre decimali. Ma nel numero proposto ve ne sono cinque. Dunque le altre cinque si

dovranno supplire con altrettanti zeri. E quindi converrà estrarre la radice quadrata da 172,0835600000.

Si consideri ora il numero 172,0835600000 come se fosse intiero, e da esso se n' estragga la radice quadrata 1311806, e da tal radice se ne separino cinque cifre decimali. Sarà 13,11806 la radice quadrata di 172,08356 coll'approssimazione fino alle centomillesime. Che se a destra del numero dato vi si fossero posti altri zeri, si sarebbe ottenuta la radice quadrata dal numero dato con maggiore approssimazione.

§. 147. *Cor. III.* Il perchè se a destra di un numero intiero, che non sia un quadrato perfetto, si ponga una virgola, e poi si scriva un numero pari di zeri, dal numero, che ne risulta, si potrà estrarre la radice quadrata considerandolo come un intiero unito ad un decimale: ed in tal caso la radice sarà più esatta di quella, che si otterrebbe non ponendo gli zeri a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata dal numero 572 coll'approssimazione fino alle diecimillesime.

E poichè l' approssimazione della radice si dee spingere fino alle parti diecimillesimi, cioè fino alla quarta cifra decimale; l' è chiaro, che nel quadrato vi debbono essere otto cifre decimali. Ma queste mancano intieramente. Dunque convien scrivere una virgola ed otto zeri a destra del numero 572, e poi estrarre la radice quadrata (§. 146.) 23,9165 dal numero 572,00000000.

§. 148. *Cor. IV.* La radice quadrata di un fratto semplice può ottenersi o riducendo prima esso fratto ad un decimale, che abbia un numero pari di cifre decimali (§. 104.), e poi estraendo la radice quadrata da tal fratto decimale, o pure estraendo le radici quadrate dal numeratore e dal denominatore di esso fratto semplice, e 'l fratto, che avrà per numeratore la prima di tali radici e per denominatore la seconda sarà la radice quadrata del proposto (§. 129.).

§. 149. *Cor. V.* E se debbasi estrarre la radice quadrata da un numero intiero unito ad un fratto sem-

plice, convien prima ridurre tal fratto semplice ad un fratto decimale, che abbia un numero pari di cifre decimali, e poi da quel numero intiero aggiunto a tal fratto decimale dovrà estrarsene la radice quadrata, come quassù si è indicato (§. 146.).

§. 150. *Cor. VI.* Finalmente se vogliasi estrarre la radice quadrata da un numero denominato, che dinoti un quadrato, si dovrà esso esibire per le unità quadrate dell' infima specie, e poi dal numero, che si ottiene, converrà estrarnè la radice quadrata.

Esempio. Si voglia estrarre la radice quadrata da $187^{can.\,qu.}\ 47^{pal.\,qu.}\ 117^{on.\,qu.}\ 4^{min.\,qu.}$.

E poichè il quadrato di una canna (§. 117.) contiene 64 palmi quadrati, in $187^{can.\,qu.}$ si dovranno contenere 187 volte 64 palmi quadrati; cioè 11968 palmi quadrati. Il perchè la somma di $187^{can.\,qu.}$ e di $47^{pal.\,qu.}$ dovrà pareggiare la somma di $11968^{pal.\,qu.}$ e di $47^{pal.\,qu.}$; cioè dovrà pareggiare $12015^{pal.\,qu.}$. Ma il quadrato di un palmo contiene 144 once quadrate. Dunque se multiplicasi 12015 per 144, il prodotto 1730160 dovrà dinotare il numero delle once quadrate, che si contengono in $187^{can.\,qu.}$ e $47^{pal.\,qu.}$. Onde se a quel prodotto vi si aggiunga 117, la somma 1730277, che ne risulta, dovrà dinotare il numero delle once quadrate, che si contengono in $187^{can.\,qu.}\ 47^{pal.\,qu.}\ 117^{on.\,qu.}$. Ma il quadrato di un' oncia contiene 25 volte quello di un minuto. Dunque se il numero 1730277 si multiplichi per 25, ed al prodotto 43256925 si aggiungano 4 minuti quadrati, la somma 43256929, che si ottiene, ne dovrà dinotare il numero dei minuti quadrati, che si contengono nel proposto numero denominato: e la ra-

dice quadrata 6577 di 43256929 dinoterà i minuti lineari, che sono nella radice quadrata dello stesso numero dato. Ma ogni oncia (§. 109.) contiene 5 minuti, ogni palmo 12 once, ed ogni canna 8 palmi. Dunque 6577 minuti equivalgono a $13^{can.}$ $5^{pal.}$ $7^{on.}$ $2^{min.}$, che dev' essere la radice quadrata del proposto numero.

PROP. XXXV. PROBL.

§. 151. *Dato un numero intiero, estrarne la radice cubica.*

Sol. Sia dato il numero 26198073, fa duopo estrarne la radice cubica.

Il numero proposto, come quaggiù si vede, si divida mercè alcune virgole dalla destra verso la sinistra in periodi, ciascuno dei quali costi di tre cifre, all' infuori dell' ultimo o del primo a sinistra, che può contenerne due ed anche una. Sarà chiaro, che il numero 26 dinotato dal primo periodo a sinistra debba contenere il cubo della prima cifra della radice. Onde se dal numero 26 se n' estragga la radice cubica esatta o prossimamente minore 2, se esso non sia un cubo esatto, dovrà essere 2 la prima cifra della radice (§. 137.). Intanto il cubo 8 di 2 si sottragga dal primo periodo 26, ed a destra del residuo 18 vi si ponga il numero 198 dinotato dal secondo periodo. Sarà chiaro, che il numero 18198, che ne risulta, non debba essere minore della somma del triplo quadrato della prima cifra 2 della radice multiplicato per la seconda cifra, del triplo quadrato della seconda cifra multiplicato per le prima, e del cubo della seconda cifra (§. 137.), tal che questi numeri nel sommarli sieno in modo disposti, che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, e le unità del secondo sulle diecine del terzo. Onde se dal numero 18198 si cancellino le due ultime cifre verso la destra, il numero 181, che n' emerge, dovrà contenere il triplo quadrato della prima cifra 2

della radice multiplicato per la seconda. Il perchè se dividasi 181 per 12, che è il triplo quadrato di 2, il quoto 9 sarà la seconda cifra della radice, se il cubo di 29 non risulti maggiore del numero 26198 dinotato dai due primi periodi del numero dato: altrimenti si dovrà diminuire di 1 la seconda cifra della radice. Ma il cubo di 29 è 24389, che è minore di 26198. Dunque se dal numero 26198 se ne sottragga l'altro 24389, e a destra del residuo 1809 si ponga 073, che è il terzo periodo del numero dato, il numero 1809073, che ne risulta, dovrà contenere la somma del triplo quadrato di 29 multiplicato per la terza cifra della radice, del triplo quadrato della terza cifra multiplicato per 29, e del cubo della terza cifra, tal che questi numeri nel sommarli sieno in modo disposti, che le unità del primo corrispondano sulle diecine del secondo, e le unità del secondo sulle diecine del terzo. Onde se dal numero 1809073 si separino le due ultime cifre verso la destra, ne dovrà emergere 18090, che conterrà il triplo quadrato di 29 multiplicato per la terza cifra della radice. E quindi se dividasi 18090 per 2523, che è il triplo quadrato di 29, il quoto 7 sarà la terza cifra della radice. C. B. F.

Numero dato	26,198,073	Radice cubica .. 297
cubo di 2	8	3.plo qua. di 2 .. 12
	18198	3.plo qua. di 29 .. 2523
cubo di 29	24389	
dif. dai due pr. perio. e ter. p.	1809073	
cubo di 297	26198073	
Residuo	0	

Esempio. Si voglia estrarre la radice cubica dal numero 357423402574.

Il numero proposto si divida in periodi, come quassù si è indicato, e poi si estragga la radice cubica 7 dal numero 357 dinotato dal primo periodo a sinistra, e 'l cubo 343 di 7 si sottragga da esso primo periodo. Inoltre, a destra del residuo 14 si ponga la prima ci-

tra 4 del numero dinotato dal secondo periodo, e 'l numero 144, che ne risulta* si divida per 147 triplo di 49 quadrato di 7; il quoto si dovrà scrivere alla destra della prima cifra 7 della radice. Ma 147 è maggiore di 144. Dunque dovrà essere *o* la seconda cifra della radice, e 'l numero dinotato dalle due prime cifre della radice sarà 70, di cui il cubo dovrà pareggiare 343000, che tolto da 357423 numero dinotato dai due primi periodi, darà per residuo 14423. Onde se a tal residuo vi si ponga la prima cifra 4 del terzo periodo, e 'l numero 144234, che ne risulta si divida per 14700, il quoto 9 di tal divisione dovrà dinotare la terza cifra della radice. Il perchè se il cubo 356400829 di 709 si sottragga dal numero 357423402 dinotato da tre primi periodi, ed al residuo 1022573 si ponga verso la destra il numero 5 prima cifra dell'ultimo periodo, il numero 10225735, che ne risulta, diviso per 1508043 triplo quadrato di 709 darà per quoziente 6, che sarà l'ultima cifra della radice, per esserne il cubo di 7096 non maggiore del numero dato, come quaggiù si vede.

Numero proposto	357,423,402,574	Rad. cubica 7096
cubo di 7	343	14700
	144234	1508043
cubo di 709	356400829	
	10225735	
cubo di 7096	357306420736	
Residuo	116981838	

§. 152. *Cor. I.* E poichè la radice cubica di un numero, che contiene intieri e decimali, o solo decimali, deve avere tante cifre decimali, che sono in numero la terza parte di quelle di esso numero (§. 140.); l'è chiaro, che per estrarre la radice cubica da un numero, che contenga intieri e decimali o solo decimali, sarà mestieri, che le cifre decimali si riducano, se nol sono, mercè uno o due zeri, che si pongano a destra di esso numero, a tal numero, che sia divisi-

bile per 3. Dipoi converrà estrarre la radice cubica dal numero, che ne risulta, considerando le cifre decimali come se fossero intiere. E finalmente dalla radice trovata se ne dovranno separare tante cifre decimali, che sieno in un numero la terza parte di quelle, che vi erano nel cubo compresovi lo zero o i due zeri, se furono posti a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice cubica dal numero 35,7452034.

E poichè nel numero proposto vi sono sette cifre decimali, conviene scrivere a destra di esso due zeri, come quaggiù si vede, affinchè il numero delle cifre decimali si riduca a 9, che è divisibile per 3. Onde dovrà risultarne l'altro numero 35,745203400, che ha lo stesso valore del proposto. Intanto da questo numero se ne tolga la virgola, e dal numero intiero 35745203400 si estragga la radice cubica (§. 151.) 3294, e ne dovrà risultare 3867216 per residuo. Or essendo il cubo di 3294 minore di 35745203400 per 3872216, sarà il cubo di 3294 diviso per 1000 minore di 35745203400 diviso pel cubo di 1000 per 3867216 diviso pel cubo di 1000. Adunque la radice cubica prossimamente minore della vera del numero proposto dev' essere 3,294.

Numero dato	35,745,203,400	Radice cubica.. 3,294
cubo di 3	27	3.plo quad. di 3.. 27
	87	3.plo quad. di 32.. 3072
cubo di 32	32768	3.plo quad. di 329.. 324723
	29772	
cubo di 329	35611289	
	1339144	
cubo di 3294	35741336184	
Residuo	3867216	

§. 153. *Cor. II.* Essendo il numero 35,7452034 lo stesso dell'altro, che risulta ponendo (§. 99.) a destra di esso un qualsivoglia numero di zeri, l'è chiaro, che la radice cubica di 35,7452034 debba essere la stessa di quella, che si ottiene ponendo a destra

dello stesso numero tanti zeri, che colle cifre decimali sieno in numero divisibile per 3. Ma in tal caso le cifre decimali sono maggiori di numero. Dunque dalla radice, che si ottiene converrà separare un maggior numero di cifre decimali: e questa radice poi sarà più esatta di quella, che si avrebbe non ponendo i zeri a destra del numero dato.

Esempio. Estrarre la radice cubica dal numero 35,7452034 coll' approssimazione fino alle diecimillesime.

E poichè l'approssimazione della radice da trovarsi dee spingere fino alle diecimillesime, cioè fino alla quarta cifra decimale, nel cubo vi dovranno essere (§. 140.) dodici cifre decimali. Ma nel numero proposto ve ne sono sette. Dunque le altre cinque si dovranno supplire con altrettanti zeri. E quindi converrà estrarre la radice cubica da 35,745203400000.

Si consideri ora il numero 35,745203400000 come se fosse intiero, e da esso se n' estragga la radice cubica 32941. Sarà 32941 diviso per 10000 la radice cubica di 35745203400000 diviso pel cubo di 10000. Ma il numero 32941 diviso per 10000 adegua 3,2941, e 35745203400000 diviso pel cubo di 10000 pareggia 35,745203400000, ovvero 35,7452034. Dunque la radice cubica del numero proposto adegua 3,2941, coll'approssimazione fino alla quarta cifra decimale. Che se poi a destra del numero dato oltre dei cinque zeri già scritti vi si pongano altri ternarii di zeri, si potrà ottenere di esso numero la radice cubica con maggiore approssimazione.

§. 154. *Cor. III.* Il perchè se a destra di un numero intiero, che non sia cubo esatto, si ponga una virgola, e poi si scriva un qualsivoglia numero di ternarii di zeri, dal numero, che ne risulta, se ne potrà estrarre la radice cubica considerandolo (§. 153.) come un numero intiero unito ad un fratto decimale, ed in tal caso la radice sarà più esatta di quella, che si otterrebbe senza porre quei zeri a destra del numero dato.

Esempio. Si voglia estrarre la radice cubica da 59642 coll' appprossimazione fino alle centesime.

E poichè l' approssimazione della radice cubica domandata si dee spingere fino alle centesime, cioè fino alla seconda cifra decimale, nel cubo vi debbono essere sei cifre decimali (§. 140.). Ma queste mancano nel numero dato. Dunque se a destra dello stesso numero si scriva una virgola, e poi si pongano sei zeri, la radice cubica (§. 153) 39,07 dell' intiero e decimale 59642,000000 sarà quella, che si domanda.

§. 155. *Cor. IV.* La radice cubica di un fratto semplice può ottenersi o riducendo prima esso fratto ad un decimale, che contenga un completo numero di ternarii di cifre decimali, e poi estraendo la radice cubica da tal fratto decimale (§. 153.), o pure estraendo le radici cubiche dal numeratore e dal denominatore del fratto semplice, il fratto, che avrà per numeratore la prima di quelle radici, e per denominatore la seconda, sarà la radice cubica del fratto semplice dato.

§. 156. *Cor. V.* E se debbasi estrarre la radice cubica da un numero intiero unito ad un fratto semplice, convien prima ridurre il fratto semplice ad un fratto decimale, che contenga un completo numero di ternarii di cifre decimali, e poi da quel numero intiero unito a tal fratto decimale dovrà estrarsene la radice cubica, come quassù si è indicato (§. 153.).

§. 157. *Cor. VI.* Finalmente se vogliasi estrarre la radice cubica da un numero denominato, che dinoti un cubo, si dovrà esso esibire per le unità cubiche dell' infima specie, e dipoi dal numero, che si ottiene dovrà estrarsene la radice cubica.

Esempio. Estrarre la radice cubica dal numero denominato $34201^{\text{can. c.}}\ 90^{\text{pal. c.}}\ 458^{\text{on. c.}}\ 13^{\text{min. c.}}$.

E poichè il cubo di una canna (§. 122.) contiene 512 palmi cubici, in 34201 canne cubiche si dovranno contenere 34201 volte $512^{\text{pal. c.}}$, cioè 17510912.

Il perchè la somma di $34201^{\text{can. c.}}$ e di $90^{\text{pal. c.}}$ dovrà pareggiare la somma di $17510912^{\text{pal. c.}}$ e di $90^{\text{pal. c.}}$; cioè dovrà pareggiare $17511002^{\text{pal. c.}}$. Ma il cubo di un palmo contiene 1728 once cubiche. Dunque se multiplicasi 17511002 per 1728, il prodotto 30259011456 dovrà dinotare il numero delle once cubiche che si contengono in $34201^{\text{can. c.}}$ $90^{\text{pal. c.}}$. Onde se a quel prodotto vi si aggiungano $458^{\text{onc. c.}}$, la somma 30259011914, che ne risulta, dovrà dinotare il numero delle once cubiche, che si contengono in $34201^{\text{can. c.}}$ $90^{\text{pal. c.}}$ $458^{\text{on. c.}}$. Ma il cubo di un oncia contiene 125 once cubiche. Dunque se il numero 30259011914 si multiplichi per 125, ed al prodotto 3782376489250 si aggiungano 13 minuti cubici, la somma, che si ottiene ne dovrà dinotare il numero dei minuti cubici, che si contengono nel proposto numero denominato, e la radice cubica 15580 di 3782376489263 dinoterà i minuti lineari, che sono nella radice cubica della stesso numero dato. Ma ogni oncia (§. 109.) contiene 5 minuti, ogni palmo 12 once, ed ogni canna 8 palmi. Dunque in 15580 minuti vi si contengono $32^{\text{can.}}$ $3^{\text{pal.}}$ $8^{\text{on.}}$ $0^{\text{min.}}$

CAP. VIII.

DELLE RAGIONI E PROPORZIONI GEOMETRICHE.

§. 158. *Def. XXVI.* Due grandezze diconsi *omogenee* o *dello stesso genere* se una di esse presa un certo numero di volte possa uguagliare o superare l'altra.

§. 159. *Def. XXVII.* Due grandezze si dicono *eterogenee* o *di diverso genere* se una di esse presa

un qualunque numero di volte non possa mai uguagliare o superare l' altra.

§. 160. *Def. XXVIII.* La *ragione* o il *rapporto* di due grandezze è il paragone, che si fa di una di esse all' altra. Onde per poter paragonare quelle grandezze convien, che esse sieno omogenee (§. 158.).

§. 161. *Scol. I.* Il paragone di una grandezza ad un altra può istituirsi in due differenti maniere; cioè o coll' esaminare quante volte la prima di dette grandezze contiene la seconda, o col determinare di quanto la prima di esse supera o è minore dell' altra. Nel primo caso la ragione dicesi *geometrica*, e nel secondo *aritmetica.*

Esempio. Se paragonasi la lunghezza di 12 canne a quella di 4 canne, e si determini il numero 3, che dinoti quante volte la prima di dette grandezze contenga la seconda, un tal paragone dicesi *ragione* o *rapporto geometrico.*

Che se poi il numero 13 si paragoni all' altro 8 determinando l' eccesso 5 del primo di essi sul secondo, un tal paragone dovrà chiamarsi *ragione* o *rapporto aritmetico.*

§. 162. *Scol. II.* Le ragioni geometriche vengono dette semplicemente *ragioni;* e perciò in appresso col nome di *ragione* dovrà sempre intendersi la ragione geometrica.

§. 163. *Def. XXIX.* Le grandezze, che si paragonano in una ragione, diconsi *termini di essa:* ed in ispecie la prima di quelle grandezze chiamasi *antecedente*, e la seconda *conseguente* della ragione.

§. 164. *Scol.* La ragione di due grandezze suole indicarsi ponendo tra l' antecedente e 'l conseguente due punti; tal che per dinotare la ragione di 7 canne a 9 canne, si scrive $7^{can.} : 9^{can.}$, e si pronuncia » 7 canne sta a 9 canne ».

§. 165. *Def. XXX.* Il fratto, che ha per numeratore l' antecedente e per denominatore il conseguente

di una ragione, chiamasi *quoziente*, *quantità di ragione*, o *esponente di ragione* dell'antecedente al conseguente.

§. 166. *Cor.* Dunque la quantità di ragione è un numero astratto, che dinota quante volte il conseguente della ragione si contiene nell'antecedente.

§. 167. *Def. XXXI.* Due o più ragioni sono *uguali* se uguali sieno le loro quantità di ragioni.

Esempio. La quantità di ragione di 7 canne ad 11 canne adegua il fratto (§. 165.) $\frac{7}{11}$, cui è pure uguale la frazione $\frac{63}{99}$, che dinota la quantità di ragione di 63 ducati a 99 ducati. Dunque sono uguali le ragioni di 7 canne ad 11 canne, e di 63 ducati a 99 ducati.

§. 168. *Cor.* Se due ragioni sieno tra se uguali, risulteranno benanche uguali quelle altre ragioni, che si ottengono paragonando gli antecedenti ed i conseguenti delle prime ai rispettivi conseguenti di esse. Così p. es. essendo uguali le ragioni di $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}}$, e di $63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$, dovranno essere pure uguali le ragioni di $18^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}}$, e di $162^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$. Poichè essendo $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} :: 63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$, dev' essere

$$\frac{7}{11} = \frac{63}{99}, \text{ ed } 1+\frac{7}{11} = 1+\frac{63}{99}.$$

Ma $1+\frac{7}{11}$ adegua (§. 60.) $\frac{18}{11}$, ed è $1+\frac{63}{99} = \frac{162}{99}$. Dunque dev' essere $\frac{18}{11} = \frac{162}{99}$. Il perchè dovrà stare

$$18^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} :: 162^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$$

§. 169. *Def. XXXII.* Una ragione dicesi *inversa* di un' altra se la quantità di ragione della prima pareggi il quoto, che si ottiene dividendo il conseguente della seconda per l' antecedente di essa.

Esempio. Così la ragione di 5 a 9 dicesi *inversa* dell'altra di 27 a 15; poichè la quantità di ragione $\frac{5}{9}$ della prima pareggia il quoto $\frac{15}{27}$ del conseguente della seconda per l'antecedente 27 di essa.

§. 170. *Cor.* Adunque se una ragione sia inversa di un'altra, prendendo nella seconda il conseguente per antecedente e l'antecedente per conseguente, ne risulterà una ragione uguale alla prima.

§. 171. *Def. XXXIII.* Una ragione dirassi *composta* da più altre se l'esponente di essa adegui il prodotto degli esponenti di quelle altre ragioni.

Esempio. La ragione di 44 : 273 dicesi *composta* dalle ragioni di 3 : 7, di 4 : 9, e di 11 : 13; poichè l'esponente $\frac{44}{273}$ della prima adegua il prodotto $\frac{132}{819}$ degli esponenti $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, ed $\frac{11}{13}$ delle altre ragioni.

§. 172. *Cor. I.* Dunque l'esponente di una ragione, che è composta da più altre, adegua il quoziente, che si ottiene dividendo il prodotto degli antecedenti di tutte le ragioni componenti pel prodotto dei conseguenti di esse.

§. 173. *Cor. II.* Il perchè se vi sieno più ragioni, e 'l conseguente della prima adegui l'antecedente della seconda, il conseguente della seconda pareggi l'antecedente della terza, il conseguente della terza sia uguale all'antecedente della quarta, ec., la ragione, che si comporrà da esse dovrà essere uguale a quella, che ha l'antecedente della prima ragione al conseguente dell'ultima. Difatti essendo le ragioni di 3 : 7, di 7 : 11, di 11 : 17, di 17 : 23, la composta di queste avendo per esponente il fratto $\frac{3.\ 7.\ 11.\ 17}{7.\ 11.\ 17.\ 23}$, che adegua $\frac{3}{23}$, sarà uguale alla ragione dell'antecedente 3 della prima ragione al conseguente 23 dell'ultima.

§. 174. *Cor. III.* E quindi se le ragioni di 3 : 7,

di 7 : 11, di 11 : 17, e di 17 a 23 sieno respettivamente uguali ad altre, la ragione di 3 : 23 dovrà esuguale a quella, che si comporrà da queste seconde ragioni.

§. 175. *Def. XXXIV.* L' uguaglianza di due ragioni chiamasi *analogia*, o *proporzione geometrica.*

§. 176. *Scol.* Tale uguaglianza suole indicarsi o ponendo tra le due ragioni il segno = per dinotare, che sono uguali tra loro le due quantità di ragioni, o collo scrivere quattro punti :: tra le medesime ragioni: e sì l' uno che l' altro segno si pronuncia *come*. Così, per esempio, essendo uguali le ragioni di 7 canne ad 11 canne e di 63 ducati a 99 ducati, la proporzione, che risulta dall'uguaglianza di dette ragioni, si scrive nel modo seguente $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} = 63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$,

o pure nell'altro $7^{\text{can.}} : 11^{\text{can.}} :: 63^{\text{duc.}} : 99^{\text{duc.}}$:

e sì nell' una, che nell' altra maniera la proporzione si pronuncia così » 7 canne sta ad 11 canne come 63 ducati a 99 ducati ».

§. 177. *Def. XXXV.* Una proporzione dicesi *continua* se il conseguente di una delle sue ragioni adegui l' antecedente dell' altra, ed in ogni altro caso la proporzione si dirà *discreta.*

§. 178. *Cor. I.* In ogni proporzione continua vi si contengono tre termini, di cui uno fa da conseguente in una ragione, e da antecedente nell' altra, e la proporzione suole scriversi in modo che i termini uguali formino il secondo e 'l terzo termine di essa.

§. 179. *Cor. II.* Da quanto finora si è stabilito (§§. 165, e 167) rilevasi, che alla ragione di due grandezze può sostituirsi quella di due altre tra loro omogenee, ma di diverso genere delle prime, purchè la quantità di ragione delle seconde adegui quella delle prime. Così, per esempio, alla ragione di 9 ducati a 13 ducati può sostituirsi l'altra di 9 canne a 13 canne, o in generale di due grandezze, che rapportate ad

una medesima unità sieno espresse dagli stessi numeri, da cui ne son dinotate le prime.

§. 180. *Cor. III.* Inoltre, poichè un fratto qualunque adegua ciascuno di quei fratti, che risultano multiplicando o dividendo il numeratore e 'l denominatore di esso per un qualunque numero (§§. 58, e 59.), l'è chiaro, che se ambedue i termini di una ragione si multiplichino o si dividano per un medesimo numero, i prodotti o i quozienti, che ne risultano dovranno serbare tra loro la medesima ragione. Così, per esempio, se i termini della ragione di 5 : 9 si multiplichino per 7, ne risulterà la ragione di 35 : 63 uguale a quella di 5 : 9 (§. 167.). E se quei termini i dividano ambedue per 7 si troverà pure la ragione di 5 : 9 uguale all'altra di $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$. Difatti in questo ultimo caso la quantità di ragione di $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$ adegua $\frac{35}{63}$ quoziente, che si ottiene dividendo $\frac{5}{7}$ per $\frac{9}{7}$. Ma $\frac{35}{63}$ è lo stesso che $\frac{5}{9}$ (§. 59.). Dunque la ragione di 5 : 9 pareggia l'altra di $\frac{5}{7} : \frac{9}{7}$ (§. 167.).

PROP. XXXVI. TEOR.

§. 181. *In ogni proporzione geometrica il prodotto dei termini estremi è uguale al prodotto dei termini di mezzo.*

Dim. Sia la proporzione geometrica 5 : 13 :: 35 : 91; dico, che debba essere $5 \times 91 = 13 \times 35$.

Poichè sono uguali le ragioni di 5 : 13 e di 35 : 91, dovrà essere $\frac{5}{13} = \frac{35}{91}$, e riducendo questi fratti al medesimo denominatore, ne dovrà risultare $\frac{5 \times 91}{1183} = \frac{13 \times 35}{1183}$. Ma qualora due fratti sono uguali ed hanno uguali denominatori, i numeratori di essi devono essere pari-

mente uguali. Dunque dev' essere $5 \times 91 = 13 \times 35$. Vale a dire, che nella proporzione geometrica $5 : 13 :: 35 : 91$ il prodotto dei termini estremi 5 e 91 adegua quello di 13 e 35, che sono termini di mezzo. Lo stesso ragionamento dovrà farsi per qualunque altra proporzione geometrica. C. B. D.

§. 182. *Cor.* E quindi se i due termini di mezzo di una proporzione geometrica sieno uguali, nel qual caso la proporzione sarà continua, dovrà essere il quadrato del secondo termine uguale al prodotto dei termini estremi.

PROP. XXXVII. TEOR.

§. 183. *Se quattro numeri sieno tali, che il prodotto del primo pel quarto adegui l' altro del secondo pel terzo, essi numeri dovranno formare una proporzione geometrica.*

Dim. Sieno i quattro numeri 7, 25, 91, 325 tali, che il prodotto del primo 7 pel quarto 325 pareggi quello del secondo 25 pel terzo 91; dico, che debba stare $7 : 25 :: 91 : 325$.

Poichè 7×325 adegua 25×91, dividendo questi uguali prodotti per 325 si dovranno ottenere quozienti uguali; onde sarà $7 = \frac{25 \times 91}{325}$, e dividendo di nuovo l' uno e l' altro quoziente per 25 si otterrà $\frac{7}{25} = \frac{91}{325}$. E quindi essendo uguali le quantità di ragioni di $7 : 25$, e di $91 : 325$, dee stare $7 : 25 :: 91 : 325$. Dunque se quattro numeri ec. C. B. D.

PROP. XXXVIII. TEOR.

§. 184. *In ogni proporzione geometrica il quarto termine adegua il prodotto dei due termini di mezzo diviso pel primo, ed uno dei termini di mezzo è uguale al prodotto dei termini estremi diviso per l'altro dei termini medii.*

Dim. Sia la proporzione geometrica $5:13::35:91$; dovrà essere (§. 178.) $5\times91=13\times35$. Onde dividendo questi uguali prodotti per 5 ne risulterà il quarto termine 91 della proporzione uguale a $\frac{13\times35}{5}$, cioè al prodotto dei termini di mezzo 13 e 35 diviso per 5, ch' è il primo.

Che se poi quei prodotti uguali 5×91 e 13×35 si dividano ambedue per 13, ne dovrà risultare il secondo dei termini di mezzo 35 uguale a $\frac{5\times91}{13}$, cioè uguale al prodotto dei termini estremi diviso per l' altro dei termini di mezzo. Dunque ec. C. B. D.

§. 185. *Cor.* Il perchè in ogni proporzione geometrica continua il quadrato del secondo termine diviso pel primo adegua il terzo termine, e la radice quadrata del prodotto dei termini estremi pareggia il termine di mezzo.

C A P. IX.

DELLE REGOLE, CUI SI RIDUCONO I PROBLEMI ARITMETICI.

§. 186. Essendo diverse le specie dei quesiti, che colle operazioni da farsi sui numeri si possono risolvere in aritmetica, diverse debbono essere parimente le regole mercè le quali quelle quistioni possano essere risolute. Onde dovendo esporre tali regole cominceremo dalla più semplice di esse, da cui le altre si derivano in facil modo.

Della Regola del Tre diretta semplice.

§. 187. *Def. XXXVI.* Qualora vien proposta una quistione, nella quale si rilevi, che di tre numeri dati, due dinotino grandezze omogenee, e di questi il primo sia annesso al terzo e serbi al secondo la medesima ragione del terzo a quello, che si domanda, la regola

mercè la quale vien risoluta una tal quistione dicesi *Regola del Tre diretta semplice.*

§. 188. *Cor.* Dalla rapportata definizione si rileva, che nelle quistioni relative alla *Regola del Tre diretta semplice* il numero, che si domanda, dovendo dinotare una grandezza omogenea a quella, che vien rappresantata dal terzo dei numeri dati, debba ottenersi multiplicando il secondo di essi numeri pel terzo, e dipoi dividendo un tal prodotto pel primo.

PROBLEMA I.

§. 189. *Se per 23 canne di un certo panno si son pagati ducati* $332\frac{1}{2}$, *quanto si dovrà pagare per 9 canne dello stesso panno?*

Sol. In questo quesito i numeri, che ne dinotano grandezze omogenee sono 23 canne e 9 canne, di cui il primo è annesso all' altro $332\frac{1}{2}$, che ne dinota ducati, ed è chiaro, che 23 debba serbare a 9 la stessa ragione di ducati $332\frac{1}{2}$ al numero di ducati, che ne dinota il prezzo di 9 canne di panno. Adunque il quarto termine della proporzione dovrà ottenersi multiplicando il secondo termine 9 pel terzo $332\frac{1}{2}$, e poi dividendo il prodotto $2992\frac{1}{2}$ pel primo termine 23. Il quoziente $130^{\text{duc.}}\frac{5}{46}$ sarà il costo domandato.

PROBLEMA II.

§. 190. *Essendo il giorno naturale di 24 ore, e l' ora di 60'; quante ore e minuti si conterranno nei* $\frac{4}{7}$ *di un giorno?*

Sol. Si faccia $1 : \frac{4}{7} :: 24$ ore al quarto, che sarà uguale a 13 ore e $\frac{5}{7}$ di ora. Ma sta 1 ora a $\frac{5}{7}$ di ora come il numero 60 dei minuti primi, che si contengono in un ora, al numero $42 \frac{6}{7}$ dei minuti primi, che si contengono in $\frac{5}{7}$ di ora. Dunque $\frac{4}{7}$ di giorno sono lo stesso che 13 ore 42 minuti primi e $\frac{6}{7}$ di minuto primo.

PROBLEMA III.

§. 191. *Se per $27^{can.}$ $3^{pal.}$ di un certo lavoro si son pagati ducati 52, quante canne e palmi dello stesso lavoro si potranno fare con 75 ducati?*

Sol. Poichè i numeri 52 e 75 sono omogenei, e 'l primo di essi 52 è annesso a $27^{can.}$ $3^{pal.}$, cui dev' essere omogeneo quello, che si domanda; l' è chiaro, che essendo 52 ducati prezzo di $27^{can.}$ $3^{pal.}$ di lavoro minore di 75 ducati costo del numero delle canne di lavoro domandate, dovrà stare 52 a 75 nella stessa ragione di $27^{can.}$ $3^{pal.}$ al termine, che si domanda. Ma $27^{can.}$ $3^{pal.}$ equivalgono a $219^{pal.}$. Dunque dee stare $52 : 75 :: 219^{pal.}$ al numero di palmi di lavoro, che si possono fare per 75 ducati. Il perchè se multiplicasi 75 per 219, e 'l prodotto 16425 si divida per 52, il quoto $315^{pal.} \frac{45}{52}$, ovvero $39^{can.}$ $3^{pal.} \frac{45}{52}$ di palmo ne dinoterà la dimandata lunghezza di lavoro.

PROBLEMA IV.

§. 192. *Per* $27^{lib.}$ $5^{on.}$ $\frac{1}{3}$ *di un certo liquore si son pagati ducati 7 e grana* $58\frac{1}{2}$, *quanto si dovrà pagare per* $19^{lib.}$ $5^{on.}$ $\frac{1}{5}$ *dello stesso liquore?*

Sol. Essendo $27^{lib.}$ $5^{on.}$ $\frac{1}{3} = \frac{988}{3}$ di oncia, $7^{duc.}$ $58^{gr.}$ $\frac{1}{2} = \frac{1517}{2}$ di grano, e $19^{lib.}$ $5^{on.}$ $\frac{1}{5} = \frac{1166}{5}$ di oncia, la quistione proposta può enunciarsi nel modo, che siegue » Per $\frac{988}{3}$ di oncia di un certo liquore si son pagate $\frac{1517}{2}$ di grano, quanto si dovrà pagare per $\frac{1166}{5}$ di oncia dello stesso liquore? » Di questa quistione sono omogenei i due numeri $\frac{988}{3}$ e $\frac{1166}{5}$, di cui il primo è annesso all' altro $\frac{1517}{2}$, che in parti di grano ne dinota il prezzo della prima quantità di liquore, ed è chiaro, che il termine domandato debba essere maggiore, o minore di $\frac{1517}{2}$ secondo che la seconda quantità di liquore è maggiore o pur minore della prima. Dunque la proporzione da stabilirsi è la seguente

$$\frac{988}{3} : \frac{1166}{5} :: \frac{1517}{2} \text{ al quarto.}$$

Il perchè se multiplicasi $\frac{1166}{5}$ per $\frac{1517}{2}$, e 'l prodotto $\frac{1768822}{10}$ si divida per $\frac{988}{3}$, il quoziente $537\frac{906}{9880}$, o sia $537\frac{453}{4940}$ ne dinoterà in grana e frazioni di grano il prezzo della seconda quantità di liquore.

Della Regola del Tre composta diretta.

§. 193. *Def. XXXVII.* La *Regola del Tre composta diretta* è quella, mercè la quale si risolvono le quistioni, ove oltre dei termini della *Regola del Tre diretta semplice* ve ne sono o due altri, o quattro, ec. i quali essendo a due a due annessi al primo e secondo dei termini principali, sono tali che multiplicando i loro prodotti respettivamente per quei medesimi due primi termini ne fanno risultare due numeri, che col terzo di quei tre primi riducono la quistione proposta alla *Regola del Tre diretta semplice*.

§. 194. *Scol.* Dalla quistione, che quaggiù vien proposta, ne sarà chiarita la precedente definizione.

PROBLEMA.

§. 195. *Un capitale di 5240 ducati ha fruttato per lo spazio di 17 mesi ducati 340. Si vuol sapere quanto dovrà rendere un capitale di ducati 7360 impiegato per 13 mesi alla medesima ragione.*

Sol. In questa quistione oltre dei termini 5240 ducati e 7360 ducati, che ne dinotano i capitali impiegati, ed a 340 ducati rendita corrispondente al primo capitale, vi son pure i tempi 17 mesi e 13 mesi, nei quali sono stati respettivamente tenuti impiegati i due capitali. Or se quei due capitali fossero restati ambedue impiegati per lo spazio di 17 mesi, la rendita corrispondente al secondo capitale avrebbe dovuto ottenersi dalla seguente proporzione; cioè

$$5240 : 7360 :: 340^{\text{duc.}} \text{ al quarto},$$

che ne sarebbe stato dinotato da $\frac{7360 \times 340 \text{ duc.}}{5240}$. Ma poichè il secondo capitale fu tenuto impiegato per 13 mesi, la rendita di esso dovrà essere minore di $\frac{7360 \times 340 \text{ duc.}}{5240}$, e dovrà stare $17 : 13 :: \frac{7360 \times 340 \text{ duc.}}{5240}$

alla rendita, che ha dato in 13 mesi il capitale di $7360^{duc.}$ impiegato alla stessa ragione dell' altro di $5240^{duc.}$. Il perchè tal rendita dovrà essere $\frac{13 \times 7360 \times 340 \text{ duc.}}{17 \times 5240}$.

Ma se i termini dati si dispongano nella maniera quaggiù esposta, e poi si dica » In tempi uguali, col crescere il capitale si aumenta la rendita; dunque la ragione dei capitali è diretta di quella delle rendite. » Inoltre, se i capitali fossero uguali, le rendite sarebbero nella ragione dei tempi, in che essi si tennero impiegati; dunque la ragione dei tempi è pure diretta dell' altra delle rendite. Il perchè essendo disuguali i tempi non meno che i capitali, la ragione delle rendite sarà composta da quella dei tempi e dall' altra dei capitali. Adunque dovrà stare il prodotto 17×5240 del primo capitale pel tempo, in che esso si tenne impiegato, al prodotto 13×7360 del secondo capitale pel tempo, in che fu tenuto impiegato, come la rendita $340^{duc.}$ del primo capitale al » quarto proporzionale ». Sarà questo uguale a $\frac{13 \times 7360 \times 340 \text{ duc.}}{17 \times 5240}$, come si è da principio rinvenuto per mezzo di due analogie. Ma il prodotto di 13 per 7360 multiplicato per 340 adegua 32531200, che diviso per 89080 prodotto di 17 per 5240 dà per quoziente $365 \frac{1700}{8908}$, o sia $365 \frac{25}{131}$. Dunque la rendita domandata sarà di ducati $365 \frac{25}{131}$.

Capitali	*Tempi*	*Rendita corrispondente al primo capitale.*
$5240^{duc.}$	17^{mesi}	$340^{duc.}$
$7360^{duc.}$	13^{mesi}	

Della Regola del Tre inversa semplice.

§. 196. *Def. XXXVIII.* Chiamasi *Regola del Tre inversa semplice* quella mercè la quale vien risoluta ogni quistione aritmetica, ove si rilevi, che di tre numeri dati il primo corrisponda al terzo e serbi al secondo la ragione inversa dello stesso terzo termine a quello, che si domanda.

PROBLEMA.

§. 197. *Da 35 persone si è consumata una data quantità di grano in 48 giorni. Si vuol sapere in quanto tempo la stessa quantità di grano si sarebbe consumata da 140 persone.*

Sol. Poichè in 48 giorni da 35 persone si è consumata una data quantità di grano, l' è chiaro, che la stessa si sarebbe consumata nella metà di 48 giorni da due volte 35 persone, nella terza parte di 48 giorni da tre volte 35 persone, ec. Adunque col crescere il numero delle persone diminuisce quello dei giorni, nei quali la data quantità di grano si consuma, poste tutte le altre cose uguali. Il perchè la ragione di 35 a 140 dev' essere inversa di quella di 48 giorni, che corrispondono a 35 persone, al numero dei giorni domandati. Onde se facciasi 140 : 35 :: 48 al quarto proporzionale 12; questo ne dovrà dinotare il numero dei giorni domandati.

Della Regola del Tre inversa composta.

§. 198. *Def. XXXIX.* La *Regola del Tre inversa composta* è quella mercè la quale si risolvono le quistioni, ove oltre ai termini della *Regola del Tre inversa semplice* ve ne sono o due altri, o quattro, ec., che essendo a due a due annessi al primo e secondo dei termini principali, sono tali che multiplicando i loro prodotti respettivamente per quei medesimi due

primi termini ne fanno risultare due numeri, che col terzo di quei tre primi riducono la quistione proposta alla *Regola del Tre inversa semplice.*

§. 199. *Scol.* La quistione, che quaggiù vien rapportata, ne chiarirà la precedente definizione.

PROBLEMA.

§. 200. *Da 25 operai si è compito un dato lavoro in 37 giorni impiegandovi 7 ore al giorno. Si vuol sapere quanti giorni vi avrebbero impiegato 11 operai travagliandovi 9 ore al giorno.*

Sol. Se i secondi lavoratori impiegassero al travaglio tante ore in ciascun giorno per quante ne impiegano i primi, la quistione proposta si ridurrebbe alla regola precedente; poichè, poste le altre cose uguali, aumentando il numero dei lavoratori diminuisce quello dei giorni, che vi bisognano a compiere un dato travaglio, e viceversa. Adunque per determinare il numero dei giorni, in che da 11 lavoratori impiegando 7 ore al giorno si compirebbe quel travaglio, che da 25 lavoratori si compie in 37 giorni travagliandovi pure 7 ore al giorno, dovrà istituirsi la seguente proporzione; cioè $11 : 25 :: 37 : \frac{25 \times 37}{11}$.

Ora essendo $\frac{25 \times 37}{11}$ il numero dei giorni, in che da 11 lavoratori si compie un dato travaglio impiegandovi 7 ore al giorno; l'è chiaro, che il numero dei giorni verrà diminuito aumentandosi quello delle ore di travaglio in ciascun giorno. E quindi sarà pure 7 ore a 9 ore nella ragione inversa del numero dei giorni poc' anzi trovati al numero dei giorni, che si domanda; cioè dovrà stare

$$9 : 7 :: \frac{25 \times 37}{11} \text{ al quarto},$$

che sarà uguale a $\frac{7 \times 25 \times 37}{9 \times 11}$. Che se i termini dati si dispongano nella maniera quaggiù esibita, e poi si dica

» Se le ore di travaglio in ciascun giorno fossero le
» stesse pei primi e pei secondi lavoratori, aumentan-
» do il numero dei lavoratori dovrà diminuire quello
» dei giorni, che vi bisognano a compiere un dato
» travaglio, e viceversa; dunque la ragione dei lavo-
» ratori è inversa di quella dei giorni di travaglio.
» Inoltre, se il numero dei primi lavoratori fosse lo
» stesso che quello dei secondi, aumentando le ore di
» travaglio in ciascun giorno, dovrà diminuire quello
» dei giorni di travaglio; dunque la ragione delle ore
» di travaglio in ciascun giorno è inversa di quella dei
» giorni di travaglio. Il perchè essendo differenti le
» ore di travaglio in ciascun giorno non che i lavora-
» tori, la ragione dei giorni di travaglio sarà composta
» dall' inversa di quella delle ore, e dall' inversa del-
» l' altra dei lavoratori. Adunque dovrà stare il pro-
» dotto 11×9 dei secondi lavoratori per le ore, che
» essi travagliano in ciascun giorno, al prodotto 25×7
» dei primi lavoratori per le ore, che essi travagliano
» in ciascun giorno, come 37 giorni di travaglio dei
» primi lavoratori, al quarto proporzionale, che sarà
» uguale a $\frac{25 \times 7 \times 37}{11 \times 9}$, come poc'anzi si è rinvenuto ».

Ma $\frac{25 \times 7 \times 37}{11 \times 9}$ adegua $65 \frac{40}{99}$. Adunque i giorni di travaglio dei secondi lavoratori dovranno essere $65 \frac{40}{99}$. Ma i secondi lavoratori travagliano sole 9 ore al giorno; dunque la frazione $\frac{40}{99}$ dovrà considerarsi come parte di 9 ore, e non già di 24 ore, che è la durata del giorno. Il perchè i secondi lavoratori a compiere il dato travaglio impiegandovi 9 ore al giorno vi porranno 65 giorni 3 ore e 38 minuti in circa.

25 lavor. 7 ore di trav. 37 gior.

11 9.

Della Regola del Tre composta mista.

§. 201. *Def. XL.* Qualora vien proposta una quistione, nella quale si rilevi, che uno dei termini dati dee serbare a quello, che si domanda una ragione, che sia composta dalle ragioni, alcune dirette ed altre inverse dei termini, che sono annessi al terzo e quarto termine, la regola mercè la quale sarà risoluta una tal quistione dirassi *Regola del Tre composta mista.*

PROBLEMA.

§. 202. *Per fabbricare un muro lungo 87 canne, alto 3 canne e 2 palmi, e largo 6 palmi vi si sono impiegate 12 persone in 17 giorni travagliandovi 9 ore al giorno. Si vuol sapere quanto sarà lungo quel muro, che si potrà fabbricare da 19 persone in 13 giorni travagliandovi 11 ore al giorno, essendo l' altezza di esso di 2 canne e 5 palmi, e la larghezza di 5 palmi.*

Sol. Suppongasi, che sieno uguali i tempi, in che travagliano i primi ed i secondi lavoratori, non che le altezze e le larghezze delle due mura. Dovrà stare il numero dei primi lavoratori al numero dei secondi, come la lunghezza del muro fatto dai primi a quella del muro, che si potrà fabbricare dai secondi; cioè $12 : 19 :: 87$ al quarto $\frac{19 \times 87}{12}$, che sarà la lunghezza del muro, che si potrà fabbricare da 19 lavoratori in 17 giorni travagliandovi 9 ore al giorno, essendo l' altezza dello stesso muro di 3 canne e 2 palmi, e la larghezza di 6 palmi. Or poichè questi secondi lavoratori travagliano 11 ore al giorno; l' è chiaro, che se facciasi il numero delle ore 9, in che travagliano in ciascun giorno i primi lavoratori, al numero 11 delle ore in che travagliano i secondi come $\frac{19 \times 87}{12}$ al quar-

to proporzionale $\frac{11\times19\times87}{9\times12}$; questo ne dovrà dinotare la lunghezza di quel muro, che essendo alto 3 canne e 2 palmi e largo 6 palmi, si fabbricarebbe da 19 lavoratori in 17 giorni travagliandovi 11 ore al giorno. Ma questi secondi lavoratori travagliano 11 ore al giorno per soli 13 giorni; dunque dee stare $17 : 13 :: \frac{11\times19\times87}{9\times12}$ al quarto $\frac{13\times11\times19\times87}{17\times9\times12}$, che sarà la lunghezza di quel muro, che essendo alto 3 canne e 2 palmi e largo 6 palmi, può fabbricarsi da 19 lavoratori in 13 giorni travagliandovi 11 ore al giorno. Inoltre, poichè l' altezza del muro fatto dai primi fabbricatori è di 3 canne e 2 palmi, o sia 26 palmi, e quella del muro, che si dovrà fabbricare dai secondi è di 2 canne e 5 palmi, ovvero di 21 palmi; l'è chiaro, che diminuendo l'altezza del muro debba crescere la lunghezza di esso, poste le altre cose uguali. Onde dovrà stare 21 a 26 nella ragione di $\frac{13\times11\times19\times87}{17\times9\times12}$ alla lunghezza $\frac{26\times13\times11\times19\times87}{21\times17\times9\times12}$ del muro, che essendo alto 2 canne e 5 palmi e largo 6 palmi, si fabbricherebbe da 19 lavoratori in 13 giorni travagliandovi 11 ore al giorno. Ma il muro da fabbricarsi da 19 lavoratori è largo 5 palmi; ed a misura che diminuisce la larghezza del muro, poste le altre cose uguali, aumenta la lunghezza di esso; dunque dee stare 5 palmi a 6 palmi nella ragione di $\frac{26\times13\times11\times19\times87}{21\times17\times9\times12}$ al quarto proporzionale $\frac{6\times26\times13\times11\times19\times87}{5\times21\times17\times9\times12}$, che sarà la domandata lunghezza. Or poichè il precedente quarto proporzionale adegua il prodotto di 87 canne per l' altro dei fratti $\frac{19}{12}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{26}{21}$, e $\frac{6}{5}$; l'è chiaro, che la data lunghezza 87 canne del muro debba stare alla lunghezza

del muro da fabbricarsi in ragion composta di 12 : 19, di 9 : 11, di 17 : 13, di 21 : 26, e di 5 : 6; cioè a dire in ragion composta del numero dei fabbricatori, che s'impiegano pel primo muro a quello dei fabbricatori, che s'impiegano pel secondo, delle ore di travaglio, che in ciascun giorno impiegano i primi alle ore di travaglio, che v'impiegano i secondi, dei giorni, in che travagliano i primi, ai giorni, in che travagliano i secondi, dell'inversa dell'altezza del primo muro all'altezza del secondo, e dell'inversa della larghezza del primo muro alla larghezza del secondo. Il perchè la domandata lunghezza del muro potrà determinarsi per mezzo di una sola analogia, di cui il primo termine sia il prodotto $12 \times 9 \times 17 \times 21 \times 5$ degli antecedenti di tutte le ragioni componenti, il secondo sia il prodotto $19 \times 11 \times 13 \times 26 \times 6$ dei conseguenti delle medesime ragioni, e 'l terzo sia la lunghezza 87 canne del muro già fabbricato. Onde il quarto proporzionale si troverà uguale a 191 canne e 2 palmi in circa.

Della Regola di Alligazione.

§. 203. *Def. XLI.* Chiamasi *Regola di Alligazione* quella mercè la quale o si determina il prezzo di una data misura del miscuglio di più cose della stessa specie, ma di diverse qualità, o pure si determinano le quantità di ciascuna di quelle cose, affinchè si abbia un miscuglio di una data misura, che sia di un dato prezzo.

§. 204. *Cor.* Affinchè sia risolvibile una quistione relativa al secondo caso della *Regola di Alligazione*, l'è mestieri, che il prezzo dato corrispondente alla data misura del miscuglio sia minore del costo della stessa misura della migliore qualità delle cose da mischiarsi, e maggiore del costo di detta misura della infima qualità delle stesse cose, che debbono mischiarsi. E per tal ragione quel prezzo dato dicesi *prezzo medio.*

PROBLEMA I.

§. 205. *Vi sono tre qualità di vini, di cui un barile della prima qualità costa carlini 23, uno della seconda carlini 27, ed uno della terza carlini 33. Si vuol sapere il costo di un barile del miscuglio, che si fa da 2 barili del vino della prima qualità, da 3 della seconda, e da 4 della terza.*

Sol. Poichè un barile del vino della prima qualità costa carlini 23, uno della seconda carlini 27, ed uno della terza carlini 33; dovrà essere 46 carlini il prezzo di 2 barili del vino della prima qualità, 81 carlini quello di 3 barili della seconda, e 132 carlini il prezzo di 4 barili del vino della terza qualità. Dunque mischiando insieme 2 barili della prima qualità, 3 della seconda, e 4 della terza, si avranno 9 barili di vino, il cui costo sarà di carlini 259, che è la somma di 46 carlini, di 81 carlini, e di 132 carlini. Il perchè se dividasi 259 carlini per 9, si avrà per quoziente 28 carlini e $\frac{7}{9}$, che sarà il costo di un barile del miscuglio.

PROBLEMA II.

§. 206. *Un Cantiniere ha due qualità di vini, di cui un barile della prima qualità costa carlini 25, ed uno della seconda carlini 32. Egli da queste due qualità di vini vuol formarne una, che costi carlini 28 al barile. Si vuol sapere qual parte il Cantiniere debba prendere di un barile della prima qualità e quale della seconda per ottenere un barile del costo di 28 carlini.*

Sol. E poichè il prezzo medio 28 carlini supera 25 carlini, che è il primo dei prezzi dati, per carlini 3, e lo stesso prezzo medio è minore di 32 carlini, che è il secondo dei prezzi dati per carlini 4, il quadruplo di 28 carlini dovrà superare il quadruplo di 25 carlini per 4 volte 3 carlini, o sia per 12 carlini, e 'l

triplo di 28 carlini dovrà essere minore del triplo di 32 carlini per 3 volte 4 carlini, cioè per 12 carlini. Dunque il quadruplo di 25 carlini e'l triplo di 32 carlini insieme presi debbono uguagliare il settuplo di 28 carlini. Il perchè se mischiansi 4 barili del vino della prima qualità con 3 barili di quello della seconda, si otterranno 7 barili di un miscuglio, di cui il costo sarà 7 volte 28 carlini; e perciò un solo barile di tale miscuglio dovrà costare carlini 28. Or poichè l'intiero miscuglio vien formato da $\frac{4}{7}$ del vino della prima qualità e da $\frac{3}{7}$ del vino di quello della seconda, in un barile di esso dovranno contenersi $\frac{4}{7}$ di barile della prima qualità di vino e $\frac{3}{7}$ di barile di quello della seconda. Ma il comune denominatore 7 dei due fratti $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$ è la differenza dei numeri 25 e 32, che in carlini ne dinotano i prezzi dati, e sono poi i numeratori 4 e 3 dei medesimi fratti le respettive differenze del prezzo medio dal secondo e dal primo dei prezzi dati. Dunque se i prezzi dati si dispongano come quaggiù si vede, e poi la differenza 3 tra 'l prezzo medio 28 e 'l minore dei prezzi dati 25 si ponga accanto al maggiore di questi 32, e la differenza 4 tra 'l prezzo medio 28 e 'l maggiore dei prezzi dati 32 si ponga accanto al minore di questi 25, i fratti, che avranno per numeratori 4 e 3 e per comune denominatore la differenza 7 dei prezzi dati 25 e 32 dovranno respettivamente dinotarne le parti di un barile, che si dovranno prendere della prima e della seconda qualità di vino per ottenere un sol barile del costo di 28 carlini.

Prezzo medio	*Prezzi dati*	*Differenze reciproche del prezzo medio dai dati*	*Parti da prend. dai barili di vini delle date qualità.*
	25car.	4	$\frac{4}{7}$
28			
	32car.	3	$\frac{3}{7}$
Diff. dei prez. dati	7car.		

PROBLEMA III.

§. 207. ***Vi sono diverse qualità di liquori A, B, C, D, E, di cui una misura della prima qualità costa carlini 17, una della seconda carlini 19, una della terza carlini 23, una della quarta carlini 25, ed una della quinta carlini 29; determinare le parti di queste diverse qualità di liquori, che formino una misura del costo di carlini 22.***

Sol. Poichè una misura della qualità A di liquore costa carlini 17 ed una della qualità B costa carlini 19, e questi prezzi sono ambedue minori del prezzo medio dato, che è di carlini 22; l'è chiaro, che se mischiansi insieme una misura di liquore della qualità A ed una della qualità B, ogni misura del miscuglio dovrà costare carlini 18, che è minore del prezzo medio dato. Inoltre, mischiando insieme una misura di liquore della qualità C, una della qualità D, ed una della qualità E, di cui ciascuna costa più di carlini 22, che è il prezzo medio dato, dovrà risultarne un miscuglio, di cui ciascuna misura costerà la terza parte di quello, che costano le tre misure insieme, cioè carlini $25\frac{2}{3}$, che è maggiore del prezzo medio dato. Il perchè, la soluzione della presente quistione trovasi ridotta a determinare le parti, che debbono prendersi di due uguali misure di liquori, di cui una costi carlini 18 e l'altra

carlini 25 $\frac{2}{3}$, tal che una misura del miscuglio costi carlini 22. Il che si esegue come nella quistione precedente.

Della Regola di Società.

§. 208. *Def. XLII.* Chiamasi *Regola di Società* quella colla quale si risolvono tutte le quistioni, che si riducono a dividere un numero dato in più parti, che sieno proporzionali ad altri numeri benanche dati.

§. 209. *Scol.* Questa Regola vien detta di Società, poichè per mezzo di essa si determinano le parti del guadagno, o della perdita fatta da più persone, che hanno fatta società ponendo a traffico disuguali somme per un certo tempo, o somme uguali in tempi disuguali, o finalmente disuguali somme in tempi disuguali.

PROBLEMA I.

§. 210. *Tre negozianti A, B, C hanno fatta società per un certo tempo, e 'l primo di essi A ha tenuto impiegato il capitale di ducati 1360, il secondo B vi ha impiegato il capitale di ducati 2500, e 'l terzo C vi ha impiegato il capitale di ducati 1840. Terminata la società si è trovato, che il lucro totale l'è stato di ducati 950. Si vogliono determinare le parti dell'intiero guadagno, che spettano respettivamente ai socii A, B, C.*

Sol. Essendo 5700 ducati la somma dei tre capitali impiegati 1360, 2500, e 1840 ducati, l'è chiaro, che tal somma debba serbare all'intiero lucro la ragione di uno dei capitali al guadagno corrispondente a tal capitale. Adunque i quarti proporzionali delle tre seguenti analogie ne dovranno dinotare i guadagni corrispondenti ai capitali, che formano i terzi termini delle medesime analogie; cioè dovrà stare

$5700 : 950 :: 1360^{duc.} : 226^{duc.}\ 6^{car.}\ 6^{gr.}\ 8^{cav.}$, che

sarà il lucro del socio A,

$5700 : 950 :: 2500^{duc.} : 416^{duc.}\ 6^{car.}\ 6^{gr.}\ 8^{cav.}$, che

sarà il lucro del socio B, e

$5700 : 950 :: 2500 : 306^{duc.}\ 6^{car.}\ 6^{gr.}\ 8^{cav.}$, che

sarà il lucro del socio C.

PROBLEMA II.

§. 211. Tre negozianti hanno preso l' appalto per fornire il vestiario ad un certo numero di soldati pel tempo di due anni, ponendo ciascuno la somma di ducati 2570. Decorsi 9 mesi dall' epoca del contratto, che essi aveano fatto, il primo dei tre socii si ha ritirato il suo capitale, e 'l secondo ha fatto lo stesso alla fine di 21 mesi. Terminati i 2 anni si è trovato il guadagno totale di ducati 2320. Si vuol sapere quali sieno le parti dell' intiero guadagno, che spettano respettivamente a quei tre socii.

Sol. Essendo 9 mesi, 21 mesi, e 24 mesi i respettivi tempi, in che i tre socii hanno tenuti impiegati i loro capitali, di cui ciascuno è di ducati 2570, sarà chiaro, che il guadagno totale sia lo stesso di quello del capitale di ducati 2570 impiegato pel tempo di 54 mesi, che è la somma di 9 mesi, 21 mesi, e 24 mesi. Il perchè dovrà stare 54 mesi a 9 mesi nella ragione del guadagno totale di $2320^{duc.}$ alla porzione di tal guadagno, che spetta al primo dei tre socii, cioè a $386^{duc.}\ 66^{gr.}\ 8^{cav.}$, e 54 mesi a 21 mesi come $2320^{duc.}$ a $902^{duc.}\ 22^{gr.}\ 2^{cav.}\ \frac{2}{3}$, che sarà la porzione del guadagno totale, che spetta al secondo dei tre socii, e finalmente dovrà stare 54 mesi a 24 mesi nella ragione

di 2320 duc. a 1031 duc. 11 gr. 1 cav. $\frac{1}{3}$, che sarà la porzione dell' intiero guadagno, che spetta al terzo dei tre socii.

PROBLEMA III.

§. 212. *Tre negozianti hanno preso l'appalto per fornire il vestiario ad un certo numero di soldati per lo spazio di due anni. Il primo di essi ha impiegato per tale appalto duc. 2570, il secondo duc. 3430, e 'l terzo duc. 4500. Decorsi 9 mesi dall' epoca del contratto, che essi aveano fatto, il primo dei tre socii si ha ritirato il suo capitale, e 'l secondo ha fatto lo stesso a capo di 21 mesi. Terminati i due anni si è trovato il guadagno totale di duc. 4270. Si vuol sapere quali sieno le parti dell' intiero guadagno che spettano respettivamente a quei tre socii.*

Sol. Poichè il primo socio ha tenuto impiegato il capitale di ducati 2570 per lo spazio di 9 mesi, egli dovrà avere tal parte dell' intiero guadagno, che gli spetterebbe se avesse impiegato per lo spazio di un solo mese il nonuplo dello stesso capitale; cioè se avesse tenuto impiegato per un solo mese il capitale di ducati 23130. Similmente il secondo socio dovrà percepire tal parte dell' intiero guadagno, quanta ne percepirebbe se in un solo mese avesse tenuta impiegata la somma di ducati 72030, che è il prodotto del numero 21 dei mesi, in che ha tenuto impiegato il suo capitale, per lo stesso capitale 3430 ducati. Finalmente al terzo dei tre socii dovrà spettare tal parte dell' intiero guadagno, quanta gliene spetterebbe se per un solo mese avesse tenuto impiegato il capitale di duc. 108000, che è il prodotto del numero 24 dei mesi, in che ha tenuto impiegato il capitale di ducati 4500, per lo stesso capitale. Adunque se quei tre negozianti avessero preso l' appalto per un solo mese, e 'l primo di essi avesse impiegato il capitale di ducati 23130, il secon-

do quello di ducati 72030, e 'l terzo l'altro di ducati 108000, alla fine del detto mese il guadagno totale sarebbe stato pure di ducati 4270. Il perchè i quarti proporzionali delle seguenti analogie ne dovranno dinotare i guadagni corrispondenti ai capitali, che formano i terzi termini delle medesime analogie; cioè dovrà stare

$203160 : 4270 :: 23130^{\text{duc.}} : 486^{\text{duc.}}\ 14^{\text{gr.}}\ 5^{\text{cav.}}$ in circa,

che sarà il guadagno del primo dei tre socii,

$203160 : 4270 :: 72030^{\text{duc.}} : 1513^{\text{duc.}}\ 92^{\text{gr.}}$ in circa, che sarà il guadagno del secondo dei tre socii, e finalmente

$203160 : 4270 :: 108000^{\text{duc.}} : 2269^{\text{duc.}}\ 93^{\text{gr.}}\ 6^{\text{cav.}}$ in circa, che sarà il guadagno del terzo dei tre socii.

Della Regola dell' interesse composto, che dicesi pure Regola di sconto, o di interesse a scalare.

§. 213. *Def. XLIII.* La *Regola dell' interesse composto, di sconto, ovvero di interesse a scalare* è quella colla quale si risolvono tutte le quistioni, nelle quali si vuol determinare il tempo, che dee decorrerne affinchè una persona pagando uguali somme dopo uguali intervalli di tempo possa estinguere il debito, che ha contratto prendendo ad imprestito un capitale colla condizione di pagarvi l' interesse in una data ragione.

A questa regola si riferiscono pure quelle quistioni, nelle quali vien proposto di determinare la somma, che alla fine di un dato tempo dee pagarsi da una persona, la quale avendo preso ad imprestito un capitale colla condizione di pagarvi l'interesse in una data ragione, conosce solo a che monterebbe il suo debito alla fine di un altro tempo determinato.

PROBLEMA I.

§. 214. *Sempronio riceve da Cajo la somma di ducati 1800 colla condizione di pagarli alla fine di ogni anno l' interesse alla ragione del 6 $\frac{1}{2}$ per 100. Sempronio vuole estinguere il suo debito pagando a Cajo la somma di duc. 700 in ciascun anno. Si vuol sapere quanti anni Sempronio metterà a scontare il suo debito, e quanto dovrà dare a Cajo nell' ultimo anno.*

Sol. E poichè il capitale di 100 duc. dà duc. 6 $\frac{1}{2}$ di rendita annua, dovrà stare

100 : 1800 : : 6 $\frac{1}{2}$ duc. : 117 duc., che sarà l' interesse, che Sempronio dovrebbe pagare a Cajo alla fine del primo anno. Ma Sempronio alla fine del primo anno paga a Cajo ducati 700. Dunque egli oltre dell'interesse di ducati 117 paga a Cajo duc. 583 del capitale. Il perchè Sempronio alla fine del primo anno resterà debitore di soli ducati 1217, che è la differenza tra duc. 1800 e duc. 583. Inoltre, poichè il capitale di 100 duc. dà duc. 6$\frac{1}{2}$ di rendita annua, dovrà stare

100 : 1217 : : 6 $\frac{1}{2}$ duc. : duc. 79,105, che sarà l'interesse del capitale di duc. 1217. Ma Sempronio alla fine del secondo anno paga a Cajo duc. 700. Dunque egli oltre dell' interesse paga a Cajo duc. 620,895 del capitale di 1217 duc. Il perchè Sempronio alla fine del secondo anno resterà debitore di Cajo per duc. 596,105. Finalmente, poichè sta

100 : 596,105 : : 6 $\frac{1}{2}$ duc. : duc. 38,746825,

dovrà esssere l' interesse del 6 $\frac{1}{2}$ per 100 sulla somma di ducati 596,105 uguale a duc. 38,746825. Il perchè

Sempronio nel terzo anno dovrà a Cajo la somma di duc. 596,105 e di duc. 38,746825, o sia dovrà a Cajo duc. 634 e gr. 85 in circa, restando intieramente estinto il suo debito.

PROBLEMA II.

§. 215. *Sempronio prende ad imprestito da Cajo una certa somma, la quale unita all' interesse del 7 per 100 alla fine di un anno monterebbe a duc. 2140. Egli nella fine di 5 mesi vuole estinguere il suo debito. Si vuol sapere quanto dovrà pagare Sempronio a Cajo.*

Sol. E poichè 100 duc. di capitale danno duc. 7 di rendita annua, dovrà stare (§.168.) la somma 107 $^{\text{duc.}}$ del capitale e della rendita corrispondente a 7 $^{\text{duc.}}$ nella ragione di 2140 $^{\text{duc.}}$ somma del capitale e della rendita corrispondente alla rendita 140 $^{\text{duc.}}$ del capitale, che Cajo ha impiegato con Sempronio. Adunque la somma impiegata da Cajo a Sempronio coll' interesse annuo del 7 per 100 l'è stata di 2000 $^{\text{duc.}}$, che è la differenza tra 2140 $^{\text{duc.}}$ e 140 $^{\text{duc.}}$. Ora essendo 140 $^{\text{duc.}}$ la rendita del capitale di 2000 $^{\text{duc.}}$ per 12 mesi, dovrà stare 12 mesi a 5 mesi come 140 $^{\text{duc.}}$ a 58 $^{\text{duc.}}$ 33 $^{\text{gr.}}$ 4 $^{\text{cav.}}$, che sarà l' interesse del capitale di 2000 $^{\text{duc.}}$ per lo spazio di 5 mesi. Il perchè Sempronio alla fine di 5 mesi dovrà pagare a Cajo 2058 $^{\text{duc.}}$ 33 $^{\text{gr.}}$ 4 $^{\text{cav.}}$, che è la somma di 2000 $^{\text{duc.}}$ e di 58 $^{\text{duc.}}$ 33 $^{\text{gr.}}$ 4 $^{\text{cav.}}$.

Della Regola del falso, o della falsa posizione.

§. 216. *Def. XLIV.* La *Regola del falso o della falsa posizione* è quella colla quale si risolve ogni quistione aritmetica, ove per mezzo di uno o due numeri presi ad arbitrio si perviene a determinare quell'altro numero, che realmente soddisfa al quesito. Ciascuno di quei numeri, che servono per determinare quell'altro, che soddisfa alla quistione proposta chiamasi *posizione*, e la *Regola* della falsa posizione si dirà *semplice*, o *doppia* secondo che per risolvere il quesito convien fare una sola, o due posizioni.

§. 217. *Scol.* Dalle soluzioni dei quesiti, che quaggiù vengono proposti si potrà rilevare ciò che debba farsi per risolvere le quistioni relative alla Regola del falso.

PROBLEMA I.

§. 218. *Un Padre di famiglia morendo lascia eredi tre suoi figli, che si abbiano a dividere l'eredità di 60000 ducati in modo, che il primo abbia due volte quello, che avrà il secondo, ed il secondo abbia tre volte quello, che spetterà al terzo, fa duopo determinare le parti dell'intiera eredità, che spettano respettivamente a quei tre fratelli.*

Sol. Dalla proposta quistione si rileva, che se fosse nota quella parte dell'intiera eredità, che spetta al terzo dei tre fratelli, si potrebbero determinare le altre due parti; poichè quella del secondo dev' essere il triplo di quella del terzo, e la porzione del primo dev'essere il doppio di quella del secondo. Il perchè se il terzo dei tre fratelli avesse un sol ducato dell'intiera eredità, il secondo ne avrebbe 3, ed il primo 6. Ma queste tre porzioni 1, 3, e 6 insieme prese sono uguali a 10. Dunque il numero 10, e gli altri 6, 3, ed 1 devono essere proporzionali a 60000 ducati, ed alle porzioni della stessa eredità, che spettano al primo, al secondo, ed al terzo fratello. Vale a dire, che la ragione di 10 : 6

adegua quella di 60000 ducati alla porzione del primo fratello, la ragione di 6 : 3 dee pareggiare la ragione della porzione del primo a quella del secondo, e quella di 3 : 1 dev' essere uguale all' altra della porzione del secondo a quella del terzo. Il perchè la ragion (§. 173.) composta di 10 : 6, di 6 : 3, di 3 : 1 dee pareggiare l' altra, che si compone dalle ragioni di 60000 ducati alla porzione del primo fratello, della porzione del primo fratello alla porzione del secondo, e della porzione del secondo a quella del terzo. Ma la prima ragion composta pareggia quella (§. 174.) di 10 : 1, e la seconda è poi uguale all'altra di 60000 ducati alla porzione del terzo fratello. Dunque se facciasi

$10 : 1 :: 60000^{\text{duc.}}$ al quarto proporzionale $6000^{\text{duc.}}$,

questo dovrà dinotarne la porzione dell' eredità, che spetta al terzo dei tre fratelli. E quindi il secondo fratello dovrà avere $18000^{\text{duc.}}$, e 'l primo $36000^{\text{duc.}}$, e queste tre parti $6000^{\text{duc.}}$, $18000^{\text{duc.}}$, e $36000^{\text{duc.}}$ insieme prese formano la somma di $60000^{\text{duc.}}$, che è l' intiera eredità.

§. 219. *Scol.* La posizione 1, che ha servito per dinotare la parte dell'intiera eredità, che spetta al terzo dei tre fratelli, ha ridotta la quistione quassù proposta ad una semplice divisione : laddove ponendo un altro numero per posizione, la parte del terzo fratello si sarebbe ottenuta mercè una multiplica ed una divisione. Il perchè nelle soluzioni dei quesiti relativi alla Regola del falso semplice gioverà assumere l'unità per posizione.

PROBLEMA II.

§. 220. *Un Padre di famiglia morendo lascia eredi tre suoi figli A, B, C, che si abbiano a dividere l' eredità di 60000 ducati in modo, che il primo*

A abbia due volte quanto avrà il secondo B e di più 200 ducati, ed il secondo B abbia tre volte quanto avrà il terzo C e di più 300 ducati; fa duopo determinare le parti dell'intiera eredità, che spettano respettivamente ad A, B, C.

Sol. E poichè il secondo fratello B dee avere dell'intiera eredità il triplo di quanto spetta a C e di più 300 ducati, ed il primo A dee avere il doppio di quanto spetta a B, e di più 200 ducati, egli è chiaro, che A debba avere sei volte ciò che spetta a C più la somma di 400 ducati, che è il doppio di 200 ducati, più 300 ducati; cioè A dee avere sei volte ciò che spetta a C e di più 700 ducati. Il perchè se dall' intiera eredità si tolgano 700 ducati, che si diano ad A, e dal residuo si tolgano altri 300 ducati, che si diano a B, vi dovranno restare ducati 59000, che si dovranno dividere a tre persone A, B, C in modo che A abbia il doppio di B, e B il triplo di C. Dunque se pongasi uguale ad $1^{duc.}$ la parte di C, dovrà essere $3^{duc.}$ la parte di B, ed uguale a $6^{duc.}$ la parte di A. Ma le tre parti $1^{duc.}$, $3^{duc.}$, e $6^{duc.}$ insieme prese formano la somma di $10^{duc.}$; perciò dee stare (§. 218.).

$10^{duc.} : 1^{duc.} :: 59000^{duc.} : 5900^{duc.}$, che dovrà essere la parte di C. Il perchè la parte di B dovrà essere di 17700 ducati, oltre i ducati 200 già presi dall' intiera eredità, e la parte di A dovrà essere di 35400 ducati, oltre i 700 ducati già presi dai 60000 ducati.

PROBLEMA III.

§. 221. *Dividere la somma di 60000 ducati a quattro persone A, B, C, D, tal che A abbia il doppio di B, toltone 300 ducati, B abbia il triplo di*

C e di più 500 ducati, e C abbia il quintuplo di D toltone 1800 ducati.

Sol. E poichè della somma di 60000 ducati B deve averne il triplo di quello, che ha C, e di più 500 ducati, e C dee averne il quintuplo di ciò che ha D toltone 1800 ducati, sarà chiaro, che B debba averne tre volte il quintuplo di quello, che avrà D, toltone tre volte 1800 ducati, ed oltre a questa somma dovrà avere altri 500 ducati. Ma il triplo di 1800 ducati adegua 5400 ducati. Dunque B della somma di 60000 ducati dovrà avere tre volte il quintuplo di ciò che avrà D toltone 5400 ducati, ed aggiuntovi 500 ducati; cioè B dovrà avere quindici volte ciò che spetta a C toltone 4900 ducati; che è la differenza tra 5400 ducati e 500 ducati. Ma A dee avere il doppio di ciò che spetta a B toltone 300 ducati. Dunque A dovrà avere trenta volte ciò che spetta a D toltone due volte 4900 ducati e toltone pure 300 ducati; ovvero A dovrà avere trenta volte ciò che spetta a D toltone 10100 ducati, che è la somma del doppio di 4900 ducati e di 300 ducati. Il perchè il proposto Problema vedesi ridotto a dividere la somma di 60000 ducati a quattro persone A, B, C, D, tal che A abbia 30 volte ciò che spetta a D toltone 10100 ducati, B abbia quindici volte ciò che spetta a D toltone 4900 ducati, e C il quintuplo di D toltone 1800 ducati.

Suppongasi, che A sborsi la somma di 10100 ducati, B quella di 4900 ducati, e C ducati 1800, e che queste somme si aggiungano a 60000 ducati, dovrà risultarne l'intiera somma di ducati 76800, che si dovrà dividere a quattro persone A, B, C, D, tal che A abbia 30 volte ciò che spetta a D, B 15 volte ciò che spetta a D, e C 5 volte ciò che spetta a D. Il perchè se dinotisi con 1 la parte di D, le parti di A, B, C ne saranno respettivamente dinotate da 30, 15, e 5, e la somma 51 dei numeri 30, 15, 5, ed 1 dovrà serbare ad 1 la stessa ragione (§.174.) di 76800 ducati alla porzione di D. Ma 51 sta ad 1 come 76800

a $1505\frac{45}{51}$. Dunque della somma di 60000 ducati D ne dovrà avere ducati $1505\frac{45}{51}$, o sia $1505\frac{15}{17}$, e con ciò C ne avrà ducati $5729\frac{7}{17}$, B ducati $17688\frac{4}{17}$, ed A ducati $35076\frac{8}{17}$.

PROBLEMA IV.

§. 222. *Un giovane domanda a suo Padre: quale è attualmente la mia età? il Padre risponde la vostra età è attualmente un terzo della mia, e sei anni sono n' era il quarto. Si domanda l'età di ciascuno.*

Sol. Suppongasi, che l'attuale età del figlio sia di 10 anni. Sarà l'attuale età del padre di anni 30. Onde 6 anni prima che il figlio avesse fatta tale interrogazione al padre, il padre dovea avere 24 anni, ed il figlio l'età di 4 anni. Ma 4 è minore per 2 della quarta parte 6 di 24. Dunque la posizione 10, che si è adottata per dinotare l'attuale età del figlio, non soddisfa al proposto quesito. Or poichè non vi è mezzo, onde poter determinare con una proporzione l'attuale età del figlio, si supponga, che essa sia di anni 12. Sarà il padre di anni 36, e sei anni prima il figlio dovea avere anni 6, e 'l padre dovea avere anni 30. Ma 6 è minore per $1\frac{1}{2}$ di $7\frac{1}{2}$, che è la quarta parte di 30. Adunque neppure la posizione 12, che si è adottata per dinotare l'attuale età del figlio soddisfa al proposto Problema. Quindi essendo gli errori 2 ed $1\frac{1}{2}$ ottenuti dalle due precedenti posizioni ambedue in meno, ed il minore di essi ottenendosi dall'età maggiore; l'è chiaro, che se $\frac{1}{2}$, che è la differenza dei due

errori, vien prodotto dalla differenza 2 delle posizioni, la differenza $1 \frac{1}{2}$ tra 'l secondo errore e l' errore zero dovrà essere prodotta dal quarto proporzionale 6, che rinviensi in ordine ad $\frac{1}{2}$, 2, ed $1 \frac{1}{2}$. Dunque affinchè svanisca l' errore $1 \frac{1}{2}$ ottenuto dalla seconda posizione, convien che si aumenti di 6 la stessa posizione. Il perchè l' attuale età del figlio deve essere di anni 18, che è la somma della seconda posizione 12 anni, e di 6 anni, che è quarto proporzionale in ordine alla metà di un anno, a due anni, e ad un anno e mezzo. Quindi l' attuale età del padre deve essere di anni 54, che è il triplo di 18, e 6 anni prima il figlio dovea avere anni 12, e 'l padre anni 48, che è il quadruplo di anni 12.

PROBLEMA V.

§. 223. *Trovare un numero, da cui tolta la metà e 3 di più, e dal residuo tolta la terza parte e 5 di più, si abbia 14 per secondo residuo.*

Sol. Suppongasi, che il numero addimandato sia 70. Sarà la metà di esso uguale a 35, e la metà aumentata di 3 uguale a 38. Onde togliendo 38 da 70, si avrà per residuo il numero 32, di cui la terza parte adegua $10 \frac{2}{3}$, e la terza parte aumentata di 5 pareggia $15 \frac{2}{3}$. Il perchè se da 32 si tolga $15 \frac{2}{3}$, dovrà restarvi $16 \frac{1}{3}$, che supera 14 per $2 \frac{1}{3}$. Adunque dalla posizione 70 si ha un errore di $+ 2 \frac{1}{3}$.

Suppongasi in secondo luogo, che il numero addimandato sia 60. Sarà la metà di esso aumentata di 3 uguale a 33. Onde togliendo 33 da 60, si avrà per

residuo 27, di cui la terza parte aumentata di 5 pareggia 14, che tolto da 27, darà per residuo 13. Ma tal residuo dovrebbe pareggiare 14. Dunque dalla posizione 60 si ha un errore di -1.

Or poichè $+2\frac{1}{3}$ è l'errore, che si ottiene dalla posizione 70, e -1 è l'errore ottenuto dalla posizione 60, sarà $3\frac{1}{3}$ la differenza degli errori ottenuti dalle precedenti posizioni. Il perchè la differenza $3\frac{1}{3}$ degli errori dovrà stare ad uno di essi come p. es. a $2\frac{1}{3}$ nella ragione di 10 differenza delle posizioni 70 e 60 al quarto proporzionale 7. Ma l'errore $+2\frac{1}{3}$ vien prodotto dalla posizione 70. Dunque il numero, che si domanda dee pareggiare 70 diminuito di 7, cioè 63. Difatti se da 63 si tolga 34,5, che è la metà di 63 aumentata di 3, e dal residuo 28,5 si tolga 14,5, che adegua la terza di 28,5 aumentata di 5, si otterrà 14 per residuo.

PROBLEMA VI.

§. 224. *Tre fratelli hanno comprata una vigna per 10000 ducati. Il minore dice, che egli avrebbe potuto solo acquistarla, se il secondo gli avesse data la metà del suo denaro: il secondo risponde, che se il maggiore gli avesse data la terza parte del suo denaro avrebbe solo acquistata la vigna; finalmente dice il maggiore, che egli avrebbe acquistata solo la vigna col suo denaro, e colla quarta parte di quello del minore. Si vuol sapere quanto denaro avea ciascuno dei tre fratelli.*

Sol. Suppongasi primieramente, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 8000.

Poichè la vigna è stata comprata per 10000 ducati,

e si è supposto, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 8000; egli con altri 2000 ducati avrebbe solo acquistata la vigna. Ma il medesimo dice, che col suo denaro e colla metà di quello, che ha il secondo, potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque se il terzo dei tre fratelli avesse 8000 ducati, il secondo dovrebbe averne 4000, che è il doppio di 2000 ducati.

Inoltre, poichè il secondo dei tre fratelli acquisterebbe solo la vigna col suo denaro e colla terza parte di quello, che ha il maggiore; l'è chiaro, che se il secondo abbia 4000 ducati, la terza parte di quello, che avrà il primo dovrà essere 6000 ducati, che è la differenza tra'l prezzo 10000 ducati della vigna e 4000 ducati. Onde il primo dei tre fratelli dovrà avere 18000 ducati, che è il triplo di 6000 ducati. Ma il primo dice, che col suo denaro e colla quarta parte di quello del minore potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque supponendo, che il terzo fratello abbia 8000 ducati, il costo della vigna per la terza condizione del Problema sarebbe di 20000 ducati, che è la somma di 18000 ducati, che ha il maggiore, e di 2000 ducati, che è la quarta parte di ciò che ha il minore. Ma la vigna è stata comprata per 10000 ducati. Dunque dalla posizione 8000 ducati, che si è adottata per dinotare il denaro del minore dei tre fratelli, risulta l'errore di + 1000 ducati.

Suppongasi in secondo luogo, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 7000.

Poichè la vigna è stata comprata per ducati 10000, e si è supposto, che il minore dei tre fratelli abbia ducati 7000; egli con altri 3000 ducati acquisterebbe solo la vigna. Ma il medesimo dice, che col suo denaro e colla metà di quello, che ha il secondo, potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque se il terzo dei tre fratelli avesse 7000 ducati, il secondo dovrebbe averne 6000, che è il doppio di 3000 ducati.

Inoltre, poichè il secondo dei tre fratelli acquisterebbe solo la vigna col suo denaro e colla terza parte

di quello, che ha il maggiore; l'è chiaro, che se il secondo abbia 6000 ducati, il maggiore dovrà averne 12000, che è il triplo della differenza tra 'l prezzo 10000 ducati della vigna e 'l denaro 6000 ducati, che ha il secondo. Ma il maggiore dice, che col suo denaro e colla quarta parte di quello del minore potrebbe solo acquistare la vigna. Dunque supponendo, che il terzo fratello abbia 7000 ducati, il costo della vigna per la terza condizione del Problema sarebbe di 13750 ducati, che è la somma di 12000 ducati, che ha il maggiore, e di 1750 ducati, che è la quarta parte di ciò che ha il minore. Ma la vigna è stata comprata per 10000 ducati. Dunque dalla posizione 7000 ducati, che si è adottata per dinotare il denaro del minore dei tre fratelli, risulta l'errore di + 3750.

Or poichè + 10000 ducati è l'errore, che si ottiene dalla posizione 8000 ducati, e + 3750 è l'errore, che si ottiene dalla posizione 7000 ducati, sarà 6250 ducati la differenza degli errori ottenuti dalle precedenti poisizioni. Il perchè dovrà stare 6250 : 3750 come la differenza 1000 delle due posizioni 8000 e 7000 alla differenza 600 tra la seconda posizione 7000 e la vera. Dunque il minore dei tre fratelli dee avere 6400 ducati, e con ciò il secondo dee avere 7200 ducati, di cui la metà 3600 ducati è la differenza tra 'l costo della vigna e quello, che ha il minore dei tre fratelli, ed il maggiore dee avere ducati 8400, che insieme con 1600 ducati quarta parte di quello, che ha il minore, dà il costo 10000 ducati della vigna.

FINE.

INDICE

DEI CAPITOLI.

PREFAZIONE. Pag. III
Nozioni preliminari al Corso di Matematica 5

INSTITUZIONI DI ARITMETICA

CAP. I.

Principii generali della numerazione 9

CAP. II.

Del calcolo dei numeri intieri 15

CAP. III.

Del calcolo delle frazioni 29

CAP. IV.

Del calcolo dei fratti decimali 49

CAP. V.

Del calcolo dei numeri denominati 59

CAP. VI.

Del modo di formare il quadrato e 'l cubo di qualunque numero 68

CAP. VII.

Delle estrazioni delle radici quadrate e cubiche 81

CAP. VIII.

Delle ragioni e proporzioni geometriche 96

CAP. IX.

Delle Regole, cui si riducono i problemi aritmetici 103
Della Regola del Tre diretta semplice ivi
Della Regola del Tre composta diretta 107
Della Regola del Tre inversa semplice 109
Della Regola del Tre inversa composta ivi
Della Regola del Tre composta mista 112
Della Regola di Alligazione 114
Della Regola di Società 118
Della Regola dell' interesse composto, che dicesi pure Regola di sconto, o d' interesse a scalare 121
Della Regola del falso, o della falsa posizione 124

Pag.	Vers.	ERRORI.	CORREZIONI.
9	14	nove, si	nove si
13	12	respettivamente le centinaja di milioni	respettivamente le centinaja di unità, le centinaja di milioni
26	8	delle 7 dividendo	delle diecine 7 del dividendo
29	23	un numero di quelle	un certo numero di quelle
38	17	(§. 58.)	(§. 59.)
71	13	si tolgano i seguenti versi Dunque devono essere 64 i cubi, uguali ad APSITXVM, quante sono le parti della AG uguali ad AM; cioè quattro volte.	
74	35	(§. 86.)	(§. 81.)
79	4	mult. per 100	mult. per 800.
103	2	(§. 178.)	(§. 181.)

PRESIDENZA DELLA GIUNTA DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE.

Vista la domanda di Domenico Sangiacomo, il quale desidera di pubblicare per le stampe *le Istituzioni di Aritmetica del Signor D. Gabriele Fergola*.

Visto il favorevole parere del Regio Revisore Sig. D. Romualdo de Luca.

Si permette che detta opera si stampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non attesti di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all'originale approvato.

Il Presidente
M. Colangelo.

Il Seg. Gen., *e Membro della Giunta*
Loreto Apruzzese.

H
Z
Y
X
Q
R
E
F
G
E
F
C
B